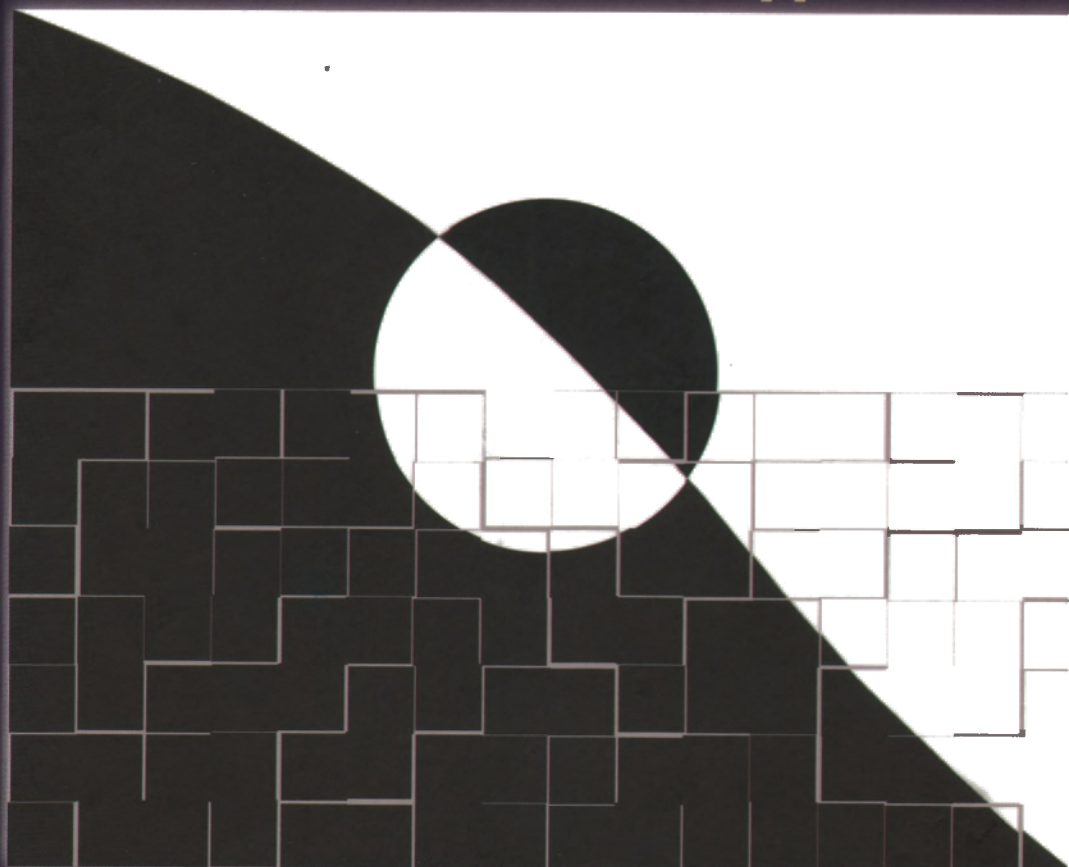


В. А. Галкин

# АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ



**СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ,  
УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И СМОЛУХОВСКОГО**



ИЗДАТЕЛЬСТВО

**БИНОМ**



**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**



В. А. Галкин

**АНАЛИЗ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ,  
УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И СМОЛУХОВСКОГО**



Москва  
БИНОМ. Лаборатория знаний  
2011

УДК 53+51  
ББК 22.311  
Г16

**Галкин В. А.**

Г16 Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского / В. А. Галкин. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 408 с. : ил. — (Математическое моделирование).

ISBN 978-5-94774-901-4

Монография посвящена вопросам обоснования корректности задач для систем нелинейных уравнений, имеющих прикладное значение в математической физике. Содержание книги направлено на выявление и анализ основных математических структур, связанных с вопросами обоснования методов математического моделирования, приводящих к нелинейным системам законов сохранения, включающих в себя систему Навье—Стокса газовой динамики, уравнения Больцмана, Смолуховского, Власова в физической кинетике. Сюда же примыкают задача Стефана и модели тепломассопереноса, связанные с выращиванием кристаллов.

Для специалистов в области прикладной математики, физической кинетики и газовой динамики, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

УДК 53+51  
ББК 22.311

Первый тираж издания осуществлен при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований по проекту  
№ 08-01-07043

---

*Научное издание*

Серия: «Математическое моделирование»

Галкин Валерий Алексеевич

**АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: СИСТЕМЫ  
ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА  
И СМОЛУХОВСКОГО**

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*. Редактор *Н. А. Шихова*  
Художники *С. Инфантэ, Н. А. Новак*  
Технический редактор *Е. В. Денюкова*. Корректор *Е. Н. Клитина*  
Оригинал-макет подготовлен *М. Ю. Копаницкой* в пакете  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$   
с использованием кириллических шрифтов семейства ЛН

Подписано в печать 20.04.11. Формат 60 × 90/16.  
Усл. печ. л. 25,5. Тираж 600 экз. Заказ

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»  
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3  
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Отпечатано в полиграфической фирме «Полиграфист»  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3

---

ISBN 978-5-94774-901-4

© БИНОМ. Лаборатория знаний,  
2009

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена вопросам обоснования корректности задач для систем нелинейных уравнений, имеющих прикладное значение в математической физике, и предназначена для научных работников, студентов-математиков и аспирантов, специализирующихся в областях математического моделирования сложных систем, прикладной математики, физической кинетики и газовой динамики.

Содержание монографии сформировалось на базе исследований, проведенных автором с учениками (В. В. Русских, И. Р. Багдасаровой, М. Г. Ткаченко, М. А. Забудько, Д. А. Рыжиковым, Д. Ю. Осечким, А. В. Галкиным) с 1989 г. по 2008 г. и направлено главным образом на выявление и анализ основных математических структур, связанных с вопросами обоснования методов математического моделирования, приводящих к нелинейным системам законов сохранения, включающих систему Навье—Стокса газовой динамики, уравнения Больцмана, Смолуховского, Власова в физической кинетике. Сюда же примыкают задача Стефана и модели тепло-массопереноса, связанные с выращиванием кристаллов. Типичным явлением, порождающим возникновение функциональных решений, является отсутствие непрерывности операторов в дифференциальных уравнениях на рассматриваемых множествах решений. В частности, для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью функциональные решения совпадают с решениями, исследованными А. Ф. Филипповым.

Доказаны теоремы о глобальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных и полулинейных систем, а также выделены классы однозначной разрешимости этой задачи, являющиеся пределами аппроксимаций заданного приближенного метода. Предложены принципы выделения классов корректности. Значительное внимание уделено приложениям, связанным с уравнениями Больцмана и Смолуховского, возникающими при моделировании разреженных газов и дисперсных коагулирующих систем.



Существенное влияние на стиль и содержание книги оказало обсуждение представленного материала и общение автора с А. Н. Тихоновым, А. А. Самарским, Н. С. Бахваловым, О. А. Олейник, Б. Л. Рождественским, С. Н. Кружковым, В. А. Тупчиевым, Б. Н. Четверушкиным, которым автор выражает сердечную благодарность.

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ И СОПУТСТВУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

## § 1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Математические модели физических систем, состоящих из статистически большого количества частиц (разреженные газы, дисперсные системы, плазма), а также модели механики сплошной среды основываются на фундаментальных соотношениях баланса, носящих общее название — *законы сохранения*. Значительное количество современных исследований по теории законов сохранения связано с вопросами корректности задач для систем нелинейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j^{(\omega)}(f, x, t)}{\partial x_j} = S^{(\omega)}(f, x, t), \quad (1.1)$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \quad \omega \in \Omega,$$

где  $f = \{f^{(\omega)}\}$  — неизвестная вектор-функция, вид потоков  $F_j$  и источника  $S$  считаются заданными характером моделируемого физического процесса,  $x \in \mathbb{R}_n$  — пространственные координаты,  $t$  — время,  $\Omega$  — множество параметров  $\omega$ , нумерующих уравнения.

Приложения этих уравнений широко известны, в частности, в связи с газодинамикой и гидродинамикой, физической кинетикой [111, 142, 178]. Данная глава является кратким обзором классов физических задач, относящихся к этим областям приложений систем (1.1), и носит в основном справочный характер.

Система законов сохранения (1.1) дополняется начальными данными

$$f|_{t=0} = f_0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad \omega \in \Omega. \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) называется *пространственно однородной*, если она рассматривается в классе решений  $f$ , не зависящих от пространственных переменных  $x$ . В этом случае функция  $f$  является

решением более простой задачи

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(t)}{\partial t} = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(t)), \quad t > 0, \quad (1.1_0)$$

$$f|_{t=0} = f_0, \quad \omega \in \Omega. \quad (1.2_0)$$

Наряду с корректностью в круге задач для системы уравнений (1.1) (*законов сохранения*) традиционно особую роль играют такие проблемы нелинейной математической физики, как обоснование приближенных методов, используемых в процессе отыскания неизвестного решения. Подчеркнем, что практические надобности, связанные с вычислением конкретных физических параметров, приводят к вопросам определения понятия решения и отыскания функциональных пространств, в которых имеет место сходимость приближенных методов. Вопросы эти становятся особенно трудными, когда нелинейные операторы  $\{F_j\}$  и  $S$  в уравнениях (1.1), (1.1<sub>0</sub>) разрывны, что может повлечь неразрешимость задачи Коши во множестве классических или обобщенных решений в целом, т. е. при всех  $t > 0$ .

## § 2. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ И УРАВНЕНИЕ СМОЛУХОВСКОГО ТЕОРИИ КОАГУЛЯЦИИ

Эволюция физических систем, состоящих из статистически большого количества элементов, сталкивающихся в процессе движения, в некотором смысле, локально, моделируется обобщенным уравнением Больцмана (*кинетическое уравнение*)

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(v^{(\omega)} f^{(\omega)}(x, t)) = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(x, t)), \quad (1.3)$$

$$\omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

где подлежащая отысканию функция  $f$  описывает состояния физической системы в каждый момент времени  $t \geq 0$  в точках с пространственными координатами  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Величины  $v^{(\omega)} \in \mathbb{R}_n$  определяют скорость движения элементов физической системы между столкновениями, т. е. *скорость свободного переноса*.

Множество параметров  $\Omega = \{\omega\}$  может быть конечным либо бесконечным. (Оно считается метрическим локально компактным счетно-конечным пространством. В частности, когда  $\Omega$  — конечный набор индексов, то  $\Omega$  снабжается дискретной метрикой.)

Уравнения (1.1), (1.1<sub>0</sub>), (1.3) возникают при моделировании процессов в форме соотношений баланса, которые выполняются при взаимодействии элементов физической системы, скажем молекул газа,

капель в аэрозольном облаке и т. д. При этом состояния моделируемого объекта в каждый момент времени  $t$  задаются вектором  $f$  (неизвестная, подлежащая отысканию), а операторы потоков  $\{F_j\}$  и операторы столкновений  $S$  в уравнениях (1.1), (1.1<sub>0</sub>), (1.3) задаются характером рассматриваемого явления. Как правило, эти операторы нелинейные, что отражает наличие взаимодействия между элементами описываемого объекта. Указанные факторы определяют значительный уровень сложности математического исследования упомянутых задач.

Уравнение (1.3) включается в *обобщенное уравнение больцмановского типа*

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x, t)}{\partial t} + L(f) = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(x, t)) \quad (1.4)$$

с независимыми аргументами  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}_1^+$ ,  $x \in \mathbb{R}_n$ . Аргумент  $\omega$  особо выделен, так как по нему осуществляется действие оператора столкновений  $S$  на функцию  $f$ . Такая запись отражает локальность столкновений частиц. Уравнение (1.4) в общем случае относится к *полулинейным законам сохранения*. Специфика уравнений больцмановского типа определяется ниже дополнительными ограничениями на оператор  $S$ , называемый в физической кинетике *оператором столкновений*.

Линейный оператор  $L$  является производящим для полугруппы (группы) преобразований, определяющей модель *свободного переноса частиц* (т. е. без взаимных столкновений) как действие однопараметрической группы (полугруппы) линейных преобразований  $T_t$ , применяемых к функции  $f$  — спектру частиц на  $\Omega$ . Такие задачи в банаховом пространстве с малыми начальными данными подробно рассматриваются в гл. 3. Обычно  $L$  — *дифференциальный оператор дивергентного вида*, т. е. его значение равно дивергенции некоторого векторного поля, но бывают ситуации, когда  $L$  — линейный интегродифференциальный оператор. Последнее характерно для марковских моделей спонтанного распада частиц [28, 245, 246] и их конденсационного роста [28], что сопутствует коагуляции капель в облаках.

Ограничения на оператор столкновений  $S$  в основном связаны со свойствами постоянства либо невозрастания нормы решения в пространстве  $L_1$ , а также неотрицательностью решения  $f$ , которое по своему физическому содержанию характеризует распределение числа частиц в системе среди возможных состояний.

В кинетической теории газов [16, 88], моделируемой уравнением Больцмана вида (1.3), решение  $f(v, x, t)$  называют *одночастичной функцией распределения*. В пространственно неоднородной модели,

описываемой уравнением (1.3), ее связывают с плотностью вероятности  $p(v, x, t)$  обнаружения молекулы в момент времени  $t$  в элементе объема  $dv \times dx$  фазового пространства  $\mathbb{R}_6 = \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3$  (декартово произведение пространственных координат на множество скоростей) посредством соотношения [177, 178], [93, 111, 232]:

$$f(v, x, t) \sim C(m, N, V)p(v, x, t),$$

где  $m$  — масса молекулы,  $N$  — число молекул в физической системе,  $V$  — пространственный объем, занимаемый газом. Таким образом, величина  $f$  характеризует плотность вероятности обнаружения молекулы в 6-мерном фазовом пространстве, которое состоит из декартового произведения 3-мерных пространственных координат на 3-мерное пространство скоростей [179]. (В пространственно однородных задачах зависимость функции  $f$  от координат  $x$  отсутствует, и фазовое пространство состоит только из множества скоростей  $v \in \mathbb{R}_3$ .) Приведенная связь используется на физическом уровне строгости, когда число частиц в системе  $N \gg 1$ . Однако ее математическое обоснование весьма далеко от своего завершения и требует дальнейших исследований. В частности, уравнение Больцмана допускает решения, которые имеют естественную физическую интерпретацию схлопывающегося или разлетающегося газа (см. ниже решения А. А. Никольского и В. С. Галкина [126, 64]), но эти решения не обладают свойством интегрируемости по переменным  $x, v \in \mathbb{R}_6$ , что противоречит стандартной нормировке плотности вероятности

$$\int_{\mathbb{R}_6} p(v, x, t) dv dx = 1.$$

Величину

$$n(x, t) = N \int_{\mathbb{R}_3} p(v, x, t) dv$$

называют *концентрацией газа*, а произведение  $\rho(x, t) = mn(x, t)$  — *плотностью распределения массы* газа в окрестности точки  $x$  в момент времени  $t$ .

Математическая проблема вывода кинетического уравнения Больцмана из динамики конечного числа частиц, доказательство корректности задач для него и отыскание условий связи его решений с решениями уравнений Навье—Стокса являются областью современных интенсивных исследований, восходящих к 6-й проблеме Гильберта.

Следуя монографиям [177, 178, 179], отметим наиболее существенные моменты, характеризующие физическую сторону явления столкновений молекул в газах.

Процессы столкновения атомных и молекулярных частиц можно разделить на два типа — упругие и неупругие. При упругих столкновениях сохраняется их суммарная кинетическая энергия, меняются лишь направления и скорости движения сталкивающихся частиц. При неупругих столкновениях меняется внутренняя энергия частиц.

Физическое описание столкновения молекул зависит от потенциала их парного взаимодействия, который определяется характером квантовомеханических и электромагнитных явлений, протекающих при их сближении. Наиболее простой процесс столкновений описывается моделью бильярдных шаров. В этом случае столкновение молекул рассматривается как взаимодействие бильярдных шаров диаметра  $d$ . В реальных газах диаметр молекул имеет порядок  $10^{-8}$  см. Для модели бильярдных шаров потенциал взаимодействия может быть задан в виде

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq d, \\ 0, & r > d. \end{cases}$$

Более сложным является потенциал взаимодействия степенного вида:

$$U(r) = \frac{A}{r^{s-1}}.$$

Для реальных газов достаточно неплохим является показатель  $s = 9$ . При значении  $s = 5$  получаем *максвелловские молекулы*, для которых проведен ряд интенсивных теоретических исследований для уравнения Больцмана, описывающего поведение одночастичной функции распределения  $f$  (см. [13, 14]).

Для описания взаимодействия молекул используется также модельный потенциал Леннарда—Джонса:

$$U(r) = B \left[ \left( \frac{d_{r_0}}{r} \right)^n - \left( \frac{r_0}{r} \right)^m \right],$$

где  $B$ ,  $r_0$ ,  $n$  и  $m$  — константы. Первый член в правой части этого выражения описывает столкновение молекул на близких расстояниях, второй — их притяжение.

В соответствии с [108–110] перечислим стандартные сведения о классическом рассеянии пары молекул, взаимодействующих посредством центральных сил с потенциалом  $U(r)$ , зависящим от расстояния между центрами их масс. Под столкновением будем понимать преобразование скоростей пары молекул из состояния

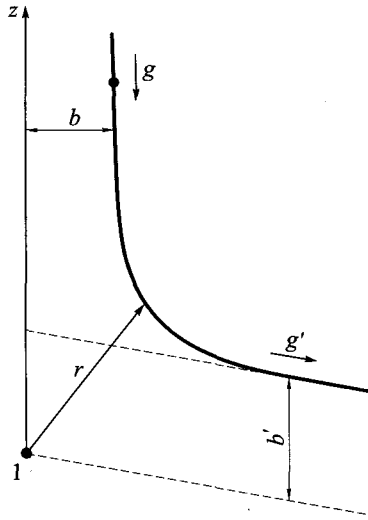


Рис. 1.1. Схема столкновения двух частиц

при  $t \rightarrow -\infty$  (до столкновения) в состояние при  $t \rightarrow +\infty$  (после столкновения).

Обозначим через  $v, v_1 \in \mathbb{R}_3$  векторы скоростей пары молекул до столкновения, через  $v', v'_1 \in \mathbb{R}_3$  — их скорости после столкновения. Пусть  $g = v_1 - v_2$  вектор относительной скорости сталкивающихся частиц до столкновения, а  $g' = v'_1 - v'_2$  этот же вектор после столкновения. Направив ось  $z$  вдоль вектора  $g$  из центра частицы 1, обозначим через  $b$  прицельное расстояние до столкновения — асимптотическое расстояние между траекторией частицы  $r$  и осью  $z$ . Через  $b'$  обозначим прицельное расстояние после процесса столкновения. Пусть  $m_1, m_2, m'_1, m'_2$  — массы пары молекул до и после столкновения.

В силу закона сохранения момента количества движения, все рассматриваемые векторы скоростей принадлежат плоскости, проходящей через векторы  $v_1$  и  $v_2$ . При столкновении выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= m'_1 + m'_2, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m'_1 v'_1 + m'_2 v'_2, \\ m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} &= m'_1 \frac{v'^2_1}{2} + m'_2 \frac{v'^2_2}{2}. \end{aligned}$$

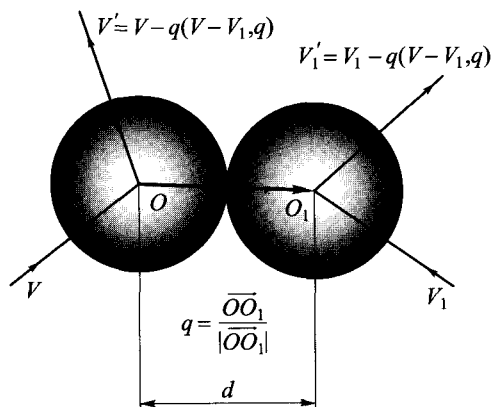


Рис. 1.2. Столкновение одинаковых бильярдных шаров

Закон столкновения пары молекул особенно просто выглядит в модели одинаковых «твердых сфер» (бильярдных шаров, имеющих одинаковые массы:  $m_1 = m_2 = m'_1 = m'_2 > 0$ ). В этом случае преобразование столкновения имеет следующий вид:

$$v' = v - q(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_3}, \quad v'_1 = v_1 + q(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_3},$$

$$\forall q \in \Sigma_2 = \{q \in \mathbb{R}_3 : (q, q)_{\mathbb{R}_3} = 1\}.$$

При этом единичный вектор  $q$  направлен вдоль линии, соединяющей центры шаров  $\overrightarrow{OO_1}$  в момент столкновения, см. рис. 1.2.

Якобиан приведенного преобразования скоростей и вектора  $q$

$$v \mapsto v',$$

$$v_1 \mapsto v'_1,$$

$$q \mapsto q' = -q,$$

в случае бильярдных шаров равен единице [88]. Законам сохранения импульса, энергии и момента количества движения пары сталкивающихся частиц удовлетворяют некоторые специальные преобразования скоростей частиц, например ортогональные столкновения, рассматриваемые ниже.

Естественно, что для модели столкновений молекул — бильярдных шаров величину  $d$  называют эффективным сечением взаимодействия пары молекул. Наглядность понятия эффективного сечения столкновения как диаметра сталкивающихся шаров позволяет построить его аналоги и для других видов потенциала столкновения. Для нейтральных газов эта величина  $d \sim 10^{-8}$  см.



В соответствии с приведенными соображениями о физике процессов столкновений следует выделить два оператора  $S$ , важных с точки зрения приложений и идейно восходящих к Дж. К. Максвеллу [15, 116, 241] и Л. Больцману [15, 16, 17, 193]. Максвелл в 1859 г. определил основное понятие кинетической теории — функцию распределения, а Больцман в 1872 г. записал первое кинетическое уравнение, которое описывает эволюцию функции распределения молекул газа по скоростям в случае близости системы к состоянию термодинамического равновесия.

Итак, первый пример — это уравнение Больцмана кинетической теории газов.

Второй важный пример исторически связан с теорией коагуляции. В 1916 г. выдающийся польский физик М. Смолуховский, исследуя эволюцию слипающихся (коагулирующих) частиц в электролитах, записал кинетическое уравнение коагуляции для функции распределения частиц по массам [150, 259, 260]. Для уравнения Больцмана кинетической теории газов оператор  $S$  и скорость свободного переноса  $v^{(\omega)}$  в уравнении (1.3) задаются соотношениями

$$S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}) = \int_{\Omega} \int_{\Sigma_2} \Phi(\omega, \xi, q) \left[ f^{(\omega')} f^{(\xi')} - f^{(\omega)} f^{(\xi)} \right] d\xi dq,$$

$$v^{(\omega)} \equiv \omega \in \Omega = \mathbb{R}_3,$$

$$\omega' = \omega - q(\omega - \xi)_{\mathbb{R}_3}, \quad \xi' = \xi + q(\omega - \xi)_{\mathbb{R}_3},$$

$$\sum_2 = \{q \in \mathbb{R}_3 : (q, q)_{\mathbb{R}_3} = 1\}.$$
(1.5)

Уравнение (1.3) с оператором столкновений (1.5) называется *уравнением Больцмана кинетической теории газов*. Вектор  $q \in \mathbb{R}_3$  — это единичный вектор, соединяющий центры молекул в момент мгновенного соударения. Интенсивность столкновений частиц (ядро интегрального оператора столкновений Больцмана (1.5) — функция  $\Phi$ ) считается известной и определяется характером физического взаимодействия пары частиц.

Одним из важнейших решений уравнения Больцмана является *максвелловское распределение*  $f = \text{const} \cdot \exp(-v^2)$  [76–79, 93], описывающее равновесный газ. Очевидно, что это решение имеет место для любых интенсивностей столкновений частиц  $\Phi$ .

Начиная с Л. Больцмана [16, 88, 193], весьма популярной является модель молекул — бильярдных шаров. Эта модель весьма широко применяется для качественных рассмотрений, связанных с процессом столкновения молекул, так как для бильярдных шаров процесс

столкновения представляется наиболее наглядно. В этом случае функция

$$\Phi(v, v_1, q) = \sigma |(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_3}|,$$

где  $\sigma = \sigma(d)$  — сечение взаимодействия молекул.

Для ряда задач используются также иные законы, связывающие скорости молекул  $\omega, \xi \in \mathbb{R}_n$  до столкновения и их скорости  $\omega', \xi' \in \mathbb{R}_n$  после столкновения, см. [23, 60, 188]. В частности, для одинаковых молекул законам сохранения импульса и энергии удовлетворяет модель ортогональных соударений частиц, когда скорости частиц при столкновении преобразуются по следующему закону:

$$\begin{cases} v' = v + u, \\ u' = 0, \\ (v, u)_{\mathbb{R}_n} = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

где штрих относится к скоростям частиц после столкновения. Величина

$$(v, u)_{\mathbb{R}_n} = \sum_{k=1}^n v_k u_k$$

— скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}_n$ . Таким образом, в процессе такого столкновения обязательно образуется покоящаяся частица, которая, по существу, выбывает из последующих взаимодействий, ибо в данной модели при столкновении с такой частицей происходит обмен импульсами.

Оператор столкновений  $S$  в данном случае определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S^{(dv)}(f) = & \\ = \delta_0(dv) & \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \setminus (0,0)} \Phi(v, v_1) f(v) f(v_1) \delta_0(\cos(\widehat{v, v_1})) dv dv_1 \right\} + \\ & + dv \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n \setminus 0} \Phi(v - v_1, v_1) f(v, t) f(v_1, t) \delta_0(\cos(\widehat{v - v_1, v_1})) dv_1 - \right. \\ & \left. - \int_{\mathbb{R}_n \setminus 0} \Phi(v, v_1) f(v, t) f(v_1, t) \delta_0(\cos(\widehat{v, v_1})) dv_1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Оператор столкновений (1.7), соответствующий закону взаимодействия частиц (1.6), состоит из двух компонент — сингулярной (первое слагаемое в формуле (1.7)), задаваемой атомарной мерой

Дирака  $\delta_0(dv)$ , сосредоточенной на покоящихся частицах, и абсолютно непрерывной компоненты, задаваемой вторым слагаемым в (1.7) с мерой Лебега  $dv$ . Сингулярная компонента описывает образование конденсированного вещества, состоящего из совокупности покоящихся частиц.

Эта модель газа напрямую связана с кинетической теорией коагуляции М. Смолуховского [63], к которой обратимся ниже в гл. 4–6. В такой модели происходит своеобразное «слияние» (коагуляция) кинетической энергии сталкивающихся частиц, когда одна частица приобретает суммарную кинетическую энергию пары сталкивающихся частиц. В частном случае, когда функция распределения частиц по скоростям зависит лишь от квадрата скорости (кинетической энергии), уравнение Больцмана с оператором ортогональных столкновений частиц превращается в уравнение коагуляции Смолуховского для функции распределения частиц по значениям кинетической энергии. В силу наличия ненулевой сингулярной компоненты у оператора столкновений (1.7) на абсолютно непрерывных начальных распределениях частиц, решения уравнений (1.1), (1.2) также должны рассматриваться в классах мер, состоящих из сингулярной и абсолютно непрерывной частей. При этом сингулярная часть решений уравнений (1.1), (1.2) сосредоточена на скорости  $v = 0$ . Таким образом, закон столкновений (1.7) приводит к необходимости рассмотрения функциональных решений уравнений физической кинетики [43, 52], которая рассматривается в гл. 2.

Модель сложения энергий при ортогональных соударениях частиц при сферически симметричных распределениях частиц по направлениям движения полностью совпадает с моделью М. Смолуховского [150, 259, 260] коагуляции масс частиц в коллоидных растворах.

Для моделей вида (1.3) кинетической теории коагуляции (Смолуховского), где фазовое пространство  $\Omega = \mathbb{R}_1^+$  — массы частиц, оператор столкновений  $S$  определен следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}) &= \frac{1}{2} \int_0^\omega \Phi(\omega - \omega', \omega') f^{(\omega - \omega')} f^{(\omega')} d\omega' - \\
 &\quad - f^{(\omega)} \int_0^\infty \Phi(\omega, \omega') f^{(\omega')} d\omega', \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+, \\
 \Phi(\omega, \omega') &= \Phi(\omega', \omega) \geq 0, \quad \omega, \omega' \in \mathbb{R}_1^+.
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Оператор столкновений Смолуховского соответствует неупругому парному столкновению частиц, состояния которых характеризуются скалярным параметром  $\omega \in \mathbb{R}_1^+$ , скажем массой.

Считается, что указанное уравнение моделирует процессы коагуляции, протекающие, например, в теплом кучевом облаке, в коллоидных растворах, в космических пылевых облаках [2, 3, 7–16, 78]. Функция распределения  $f$  определяется так, что  $f^{(\omega)}(x, t) d\omega$  описывает среднюю концентрацию частиц физической системы, которые в момент времени  $t$  лежат в пространственной области  $dx$ , а их массы  $\omega$  находятся в интервале  $d\omega$ . По своему физическому содержанию функция  $f$  должна быть неотрицательной. Ядро  $\Phi$  в операторе столкновений Смолуховского считается известной функцией слияния частиц с массами  $\omega, \omega' \in \mathbb{R}_1^+$ , а ее численное значение пропорционально частоте слияний таких частиц в единице объема системы, т. е. величине, обратной среднему времени жизни частиц с указанными массами. Конкретный вид ядра  $\Phi$  получается на основании анализа микрофизических явлений, обуславливающих взаимодействие частиц моделируемой физической системы. Отметим, что из физики явления коагуляции вытекает симметричность и неотрицательность ядра:

$$\Phi(\omega, \omega') = \Phi(\omega', \omega) \geq 0.$$

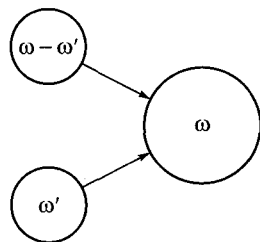
Пусть до столкновения две частицы имеют массы  $\omega, \omega' \in \mathbb{R}_1^+$ . Тогда после столкновения образуется одна частица суммарной массы  $\omega + \omega'$ , см. рис. 1.3.

Аналогично выглядит оператор столкновений Смолуховского в теории коагуляции частиц с дискретными массами:

$$S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}) = \frac{1}{2} \sum_{\omega'=1}^{\omega-1} \Phi(\omega - \omega', \omega') f^{(\omega-\omega')} f^{(\omega')} - f^{(\omega)} \sum_{\omega'=1}^{\infty} \Phi(\omega, \omega') f^{(\omega')}, \quad \omega \in \Omega = \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.3) с операторами столкновений (1.8), (1.9) в дальнейшем будем называть *кинетическим уравнением Смолуховского*.

От неупругого столкновения элементов сложных систем очень многое зависит в нашей повседневной жизни. Примером тому служит явление свертываемости (коагуляции) крови при порезах (от-



**Рис. 1.3.** Коагуляция (слияние масс) частиц при парном столкновении

существование коагуляции крови грозит смертельной опасностью так же, как и ее чрезмерная интенсивность, ведущая к образованию тромбов с последующей закупоркой кровеносных сосудов!), створаживание молока и образование киселя — это тоже коагуляция; процессы полимеризации, т. е. очень интенсивной коагуляции частичек, лежат в основе производства полимерных нитей, использующихся при изготовлении современных материалов. Напрямую с этими явлениями связаны процессы роста трещин в структуре материалов за счет их взаимных пересечений (коагуляция растущих трещин с образованием дефектов, сопоставимых с размерами детали — явление разрушения).

Коагуляция имеет прямое отношение к задачам динамики разрушения деталей и прогноза развития дефектов с целью предотвращения возможных катастроф на аэрокосмических аппаратах, разрушения трубопроводов первого контура ядерноэнергетических установок при их циклическом замораживании–размораживании и т. д. Последнее особенно актуально для ядерных реакторов с тяжелым металлическим теплоносителем (свинец, свинец–висмут), где фазовые переходы служат источником скачков давления на стенки каналов теплоносителя, что ведет к развитию трещин и разрушению конструкций.

В [60, 63] показано, что уравнение Смолуховского описывает специальный случай бoльцмановского газа (рассматриваемого в гл. 4), состоящего из одинаковых молекул, которые испытывают только ортогональные упругие соударения. В этой модели величина  $\omega$  является кинетической энергией молекулы. Очевидно, что распределение молекул  $f$  по энергиям в этом случае имеет  $\delta$ -образную особенность (меру Дирака  $\delta_0(d\omega)$ ), сосредоточенную на молекулах с нулевой кинетической энергией. Тем самым, в задачах для уравнения Смолуховского естественным образом возникают функциональные решения, являющиеся предметом следующей главы.

Наличие в физической системе источников частиц, действующих с неотрицательной интенсивностью  $q$ , отражается добавлением этой величины в правой части уравнения (1.3).

Несмотря на то что первые кинетические уравнения записаны для специальных систем, область их приложений оказалась весьма широкой. Аналоги уравнений Больцмана и Смолуховского используются при моделировании процессов переноса излучения в веществе, нейтронов в ядерном реакторе, при исследовании роста капель в облаках, дефектов в материалах реакторов на быстрых нейтронах, газовых пор в металлах и т. д. [3, 50, 54, 111, 119, 125, 168, 177, 178].

Задача Коши для уравнения (1.3) с операторами столкновений (1.5)–(1.7) подробно исследована с точки зрения корректности в целом в классах начальных данных, которые не зависят от пространственных координат  $x$ . Случай пространственно неоднородных задач весьма трудный, и число содержательных результатов здесь относительно невелико. Основная трудность заключается в отсутствии непрерывности операторов столкновений вида (1.5)–(1.7) в нормах, связанных с соотношениями сохранения или диссипации, характерных для этих задач.

### § 3. УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

К указанному классу нелинейных моделей больцмановского типа для локально взаимодействующих частиц (при парных соударениях) примыкают модели с нелокальными взаимодействиями, к которым, прежде всего, относятся уравнения теории плазмы (А. А. Власова).

В резком отличии свойств плазмы от свойств нейтральных газов, к которым относится модель больцмановского газа, определяющую роль играют два фактора. Во-первых, взаимодействие частиц плазмы между собой характеризуется кулоновскими силами притяжения и отталкивания, убывающими с расстоянием гораздо медленнее (т. е. значительно более дальнедействующими), чем силы взаимодействия нейтральных частиц. По этой причине взаимодействие частиц в плазме является, строго говоря, не парным, а коллективным — одновременно взаимодействует друг с другом большое число частиц. Во-вторых, электрические и магнитные поля сильно действуют на плазму, вызывая появление в ней объемных зарядов и токов и обуславливая целый ряд специфических свойств плазмы. Эти отличия позволяют рассматривать плазму как особое, «четвертое» состояние вещества.

Основными методами теоретического описания плазмы являются исследование движения отдельных частиц плазмы, магнитогидродинамическое описание плазмы, кинетическое рассмотрение частиц и волн в плазме.

Кинетические уравнения для плазмы — это замкнутая система уравнений для одночастичных функций распределения частиц плазмы по координатам  $r$  и скоростям  $v$  (импульсам  $p$ ) совместно с уравнениями Максвелла для средних напряженностей электромагнитных полей, создаваемых частицами плазмы. Кинетический подход к описанию состояния плазмы часто играет важную роль в описании макроскопических свойств плазмы, которые не могут быть выявлены при гидродинамическом подходе.

Наиболее простыми являются кинетические уравнения для полностью ионизированной электронно-ионной плазмы — уравнения для функций распределения

$$f = \{f_\alpha(r, v, t)\}_{\alpha \in A}, \quad A = \{e, i\},$$

электронов ( $\alpha = e$ ), однозарядных ионов ( $\alpha = i$ ), напряженностей электрического  $E(r, t)$  и магнитного  $H(r, t)$  полей. (Здесь  $r$  — пространственные координаты частиц,  $v$  — скорости,  $t$  — время.)

Точное уравнение для функций  $f_\alpha(r, v, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( E + \frac{1}{c} [v \times H] \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = S_\alpha,$$

где  $S_\alpha$  — оператор столкновений частиц физической системы,  $v$  — скорость движения частицы вида  $\alpha \in A$ ,  $e_\alpha$  и  $m_\alpha$  — заряд и масса частицы вида  $\alpha$ ,  $c$  — скорость света в вакууме.

Электромагнитное поле  $E(r, t)$ ,  $H(r, t)$  определяется из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_\alpha \int_{\mathbb{R}_3} f_\alpha(r, v, t) v dv,$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi \sum_{\alpha} e_\alpha \int_{\mathbb{R}_3} f_\alpha(r, v, t) dv,$$

$$\operatorname{div} H = 0.$$

Кинетические уравнения для плазмы существенно упрощаются в двух предельных случаях. В случае когда длина свободного пробега и время свободного пробега малы по сравнению с характерными соответствующими параметрами задачи, то возможен переход от кинетических уравнений для плазмы к соответствующим гидродинамическим уравнениям, учитывающим столкновения, например к уравнению Больцмана. В случае когда длина свободного пробега и время свободного пробега велики по сравнению с характерными соответствующими параметрами задачи, столкновениями частиц можно пренебречь, учитывая только коллективное взаимодействие частиц через самосогласованные поля. Это бесстолкновительное приближение приводит к уравнению Власова — уравнению, в котором операторы столкновения  $S_\alpha = 0$ .

Аналогично записываются уравнения Власова для системы гравитирующих масс, притягивающихся друг к другу посредством

кулоновского потенциала. В этом случае в уравнениях Власова—Максвелла—Больцмана следует положить напряженность магнитного поля  $H = 0$ . Оператор столкновений  $S$  выбирается в зависимости от характера парных соударений частиц: либо упругие соударения с оператором столкновений Больцмана, либо неупругие соударения, приводящие к коагуляции масс, с оператором столкновений Смолуховского, либо предполагается, что столкновения частиц отсутствуют (бесстолкновительная плазма, когда  $S_\alpha = 0$ ).

Следует подчеркнуть, что случай уравнений Власова при  $S_\alpha = 0$  для системы частиц, взаимодействующих посредством гладкого двухчастичного потенциала, подробно исследован Р. Л. Добрушиным [78]. Им установлена важная связь бесстолкновительных уравнений Власова с уравнением Лиувилля для упомянутых конечномерных гамильтоновых систем, и доказано, что статистическое решение для гамильтоновой системы является единственным решением уравнений Власова. Теорема единственности установлена на основе применения метрики Канторовича—Рубинштейна в пространстве мер, а также обоснован предельный переход, когда число частиц стремится к бесконечности.

Отметим, что особенность кулоновского потенциала не включается в класс задач, исследованных Р. Л. Добрушиным, и он рассмотрен в [53] на основе концепции функциональных решений [43]. Аналогичные проблемы связаны с решениями уравнений Максвелла с разрывными параметрами диэлектрическими среды [57], включающих в себя математические модели физических систем, в частности движение элементарных зарядов в разрывных средах, приводящее к возникновению переходного излучения, открытого в 1946 г. В. Гинзбургом и И. Франком [158].

#### **§ 4. УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА, КАДОМЦЕВА—ПЕТВИАШВИЛИ, ХОПФА**

К теории уравнений Власова примыкают задачи для уравнений Кортевега — де Фриза (КдФ), Кадомцева—Петвиашвили (КП) и Хопфа.

Уравнение КдФ — первый представитель так называемых солитонных уравнений. Солитон — концепция нелинейной теории. В нем на классическом уровне реализуется объект, существование которого специалисты по теории поля постулировали многие годы: локальный бегущий волновой импульс, компактная когерентная структура, устойчивое решение полевое уравнения и частицеподобные свойства.



Уравнение КдФ имеет следующий вид [98, 112, 129]:

$$u_t + uu_x = \alpha u_{xxx}. \quad (1.10)$$

Уравнение КдФ описывает эволюцию волн на мелкой воде, ионно-акустические волны, длинные волны в сдвиговых потоках и множество других физических процессов.

Кратко остановимся на некоторых математических аспектах, связанных с уравнением КдФ. Математическая теория этого уравнения широко развита. Проблемы существования решений различного рода для этого уравнения рассмотрены в [98, 112, 129, 213]. Некоторые вопросы, касающиеся единственности этих решений, еще остаются открытыми [112]. Обширная литература (см., например, [128, 129, 234, 220]) посвящена этим, а также другим аспектам математической теории уравнения КдФ, в частности существованию интегралов энергии этого уравнения, численным методам его решения, изучению периодической задачи, и т. д.

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) часто называют двумерным уравнением Кортевега — де Фриза [87]:

$$[u_t + uu_x - \alpha u_{xxx}]_x + \beta u_{yy} = 0. \quad (1.11)$$

При  $\beta > 0$  уравнение (1.11) соответствует среде с отрицательной дисперсией [87];  $\beta < 0$  соответствует среде с положительной дисперсией.

Как и для уравнения КдФ, для уравнения КП практически сняты все вопросы, касающиеся разрешимости задач, связанных с этим уравнением [95, 166, 261]. Открытыми остаются вопросы единственности этих решений.

Остановимся теперь на некоторых моментах математической теории уравнений (1.10) и (1.11).

Естественно предполагать, что уравнения КдФ, КП, а также уравнение Хопфа

$$u_t + uu_x = 0, \quad (1.12)$$

можно связать между собой, в известном смысле, посредством предельных переходов по параметрам  $\beta \rightarrow 0$  (уравнения (1.11) и (1.10)), и  $\alpha \rightarrow 0$  (уравнения (1.10) и (1.12)). При этом предполагается, что в пределе получается решение уравнения КдФ в первом случае и решение уравнения Хопфа — во втором. К сожалению, в рамках классической теории сходимости приближенных методов положительно решить этот вопрос не удастся. Эти предельные переходы удастся обосновать с помощью теории слабой сходимости приближенных

методов к функциональному решению задачи для уравнений КП и КдФ, см. гл. 8.

**§ 5. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ,  
ПОРОЖДЕННЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ.  
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ  
ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ**

Вышеупомянутые математические модели основаны на детальном описании газов посредством плотности функции распределения частиц  $f$  (спектр частиц) в фазовом пространстве динамических переменных одной частицы (одночастичном фазовом пространстве), что является основой микроскопического описания вещества, восходящего к Дж. К. Максвеллу [241]. Усреднение кинетических уравнений Больцмана, Смолуховского, Власова (т. е. интегрирование обеих частей уравнения (1.3) по некоторому семейству мер  $\mu_\beta$ ,  $\beta \in A$ , на множестве параметров  $\omega \in \Omega$ ) приводит к формальной (вообще говоря, незамкнутой) системе уравнений механики сплошной среды относительно неизвестных средних величин

$$u_\beta(x, t) = \int_{\Omega} f^{(\omega)}(x, t) \mu_\beta(d\omega), \quad \beta \in A.$$

Обычно меры  $\mu_\beta$  выбираются так, чтобы интегралы в правой части уравнения (1.1) формально обращались в ноль на рассматриваемых множествах спектров частиц  $f$  (т. е. так называемые соотношения сохранения  $\int_{\Omega} S^{(\omega)}(f) \mu_\beta(d\omega) = 0$ ), и тогда получается незамкнутая система законов сохранения механики сплошной среды для неизвестных  $u = \{u_\beta\}_{\beta \in A}$ :

$$\frac{\partial u_\beta(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j^{(\beta)}}{\partial x_j} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \quad \beta \in A.$$

Относительно вектора потоков  $F = \{F_j^{(\beta)}\}$  делаются дополнительные (замыкающие) предположения, которые постулируют зависимость  $F_j^{(\beta)}$  от набора  $u = \{u_\beta\}_{\beta \in A}$ . Преимущество такого подхода связано, как правило, с конечномерностью вектора переменных  $u = \{u_\beta\}_{\beta \in A}$ . В частности, таким образом получают систему Навье—Стокса в газовой динамике, систему Эйлера для несжимаемой жидкости и т. п. [177, 178]. Следует отметить, что в некоторых случаях операторов столкновений  $S$  Больцмана—Смолуховского на решениях  $f$  уравнения (1.1) соотношения сохранения с течением времени

могут переходить в соотношения диссипации

$$\int_{\Omega} S^{(\omega)}(f) \mu_{\beta}(d\omega) < 0$$

даже при условии, что в начальный момент времени для функции  $f|_{t=0}$  имеет место соотношение сохранения

$$\int_{\Omega} S^{(\omega)}(f|_{t=0}) \mu_{\beta}(d\omega) = 0,$$

[36, 37, 40]. Явления такого вида будут рассмотрены в гл. 7 для кинетического уравнения Смолуховского, связанного с нелокальным уравнением Хопфа:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(p, t) + [u(p, t) - u(0, t)] \frac{\partial}{\partial p} u(p, t) = 0, \quad p > 0, \quad t > 0.$$

В настоящей монографии основным математическим методом исследования перечисленных моделей является систематическое применение теории функциональных решений для систем законов сохранения вида (1.1). Важно подчеркнуть, что рассмотрение столь разнородных задач становится возможным в рамках единого подхода, основанного на использовании фундаментальных принципов создания моделей физических процессов — выполнении соотношений сохранения и диссипации, на которых основано взаимодействие элементов физических систем. В этом ключе применяется и исследуется имитационное моделирование в задачах физической кинетики и механики сплошной среды. Одной из важнейших характеристик адекватности применяемых приближенных методов моделирования реальным физическим процессам служит установление соответствия принципов математического моделирования физическим принципам описания вещества.

Другим важным моментом, определяющим необходимость применения теории функциональных решений законов сохранения, служит наличие примеров, в которых отсутствуют классические, обобщенные и мерозначные решения в задачах физической кинетики и газодинамики.

Уравнение Лиувилля — это одно из основных уравнений статистической физики для плотности функции распределения частиц  $f$  в фазовом пространстве  $x \in \mathbb{R}_n$  ( $x$  — пространственные координаты частиц). Уравнение Лиувилля имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x (V(x) f) = 0,$$

где  $V(x) \in \mathbb{R}_n$  — поле скоростей частиц среды. Уравнение Лиувилля определяет статистическое решение  $f$  для динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = V(x),$$

когда начальные данные заданы плотностью распределения частиц по пространственным координатам

$$f(x, 0) = f_0(x).$$

Особенно интересен случай, когда поле скоростей  $V$  имеет разрывы. Тогда динамическая система, вообще говоря, не имеет классических или обобщенных решений при начальных данных, сосредоточенных на разрывах поля скоростей, и существует только решение в смысле А. Ф. Филиппова [169], имеющее глубокую связь с функциональными решениями.

Систематическое исследование гиперболических уравнений с разрывными коэффициентами было начато еще в работах И. М. Гельфанда [66, 67]. Для случая разрывного поля скоростей частиц в работах Я. Б. Зельдовича и А. Д. Мышкиса [83, 84], из общих соображений используются решения задачи Коши для уравнения Лиувилля. Эти решения описывают образование дельтаобразных плотностей распределений числа частиц в координатном пространстве и разрывы сплошной среды. Нетрудно убедиться, что полученные решения не являются ни классическими, ни даже обобщенными в смысле Соболева.

Пусть скорость  $V(x)$  имеет скачок:

$$V(x) = \begin{cases} v_0 = \text{const}, & x < 0, \\ v = 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

а начальная плотность  $f_0$  постоянна в окрестности начала координат  $x = 0$ , где она принимает значение  $\bar{f}_0$ . Тогда все частицы с отрицательной полуоси  $x \in \mathbb{R}$  переносятся к началу координат и там остаются навсегда. Так как за время  $t$  в начале координат  $x = 0$  сосредоточится масса частиц  $tv_0\bar{f}_0$ , то искомая плотность среды определяется выражением

$$f(x, t) = f_0(x) + tv_0\bar{f}_0\delta_0(x),$$

где  $\delta_0(x)$  — обобщенная функция Дирака, сосредоточенная в точке  $x = 0$ . При этом предполагается, что значения времени  $t$  таковы, что произведение  $tv_0$  не выходит за границы носителя начальной функции  $f_0$ . Описанное уплотнение вещества в виде меры Дирака

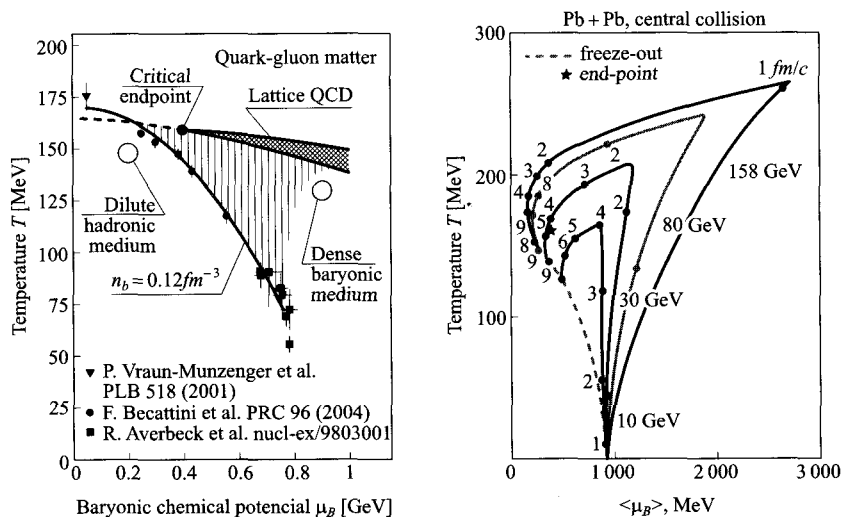
(конденсация в начале координат) может образоваться и для непрерывного поля скоростей.

Физическая интерпретация рассмотренной модели состоит в рассмотрении пучка частиц, движущихся с постоянной скоростью вдоль оси  $Ox$  в направлении начала координат  $x = 0$ , где помещена мишень, на которой частицы мгновенно останавливаются. Приведенное решение относится к классу функциональных решений законов сохранения, и в следующем разделе приводится пример решения аналогичной задачи газодинамики для идеального газа в случае встречных пучков частиц, останавливающихся при лобовых столкновениях в начале координат. Построенное решение уравнения Лиувилля является функциональным решением, которое описывает явление конденсации частиц в начале координат. Исследованию функциональных решений для уравнений Лиувилля—Власова посвящена гл. 9.

Такого рода задачи возникают в процессе математического моделирования массопереноса в ядерно-энергетических установках при наличии встречных потоков вещества (лазерный термоядерный синтез). Одним из важнейших направлений применения рассмотренных моделей для уравнений Власова—Лиувилля—Больцмана—Смолуховского с разрывными полями скоростей течения вещества является задача исследования процессов образования конденсированной материи в международном проекте физики высоких энергий CBM (Condensed Baryonic Matter), получаемой при столкновении встречных пучков частиц в ускорителе на тяжелых ионах. Следуя [197], приведем общие положения физики высоких энергий, связанные с исследованием фазовых переходов, ведущих к образованию конденсированной материи при лобовых столкновениях ядер в ускорителях тяжелых ионов.

Исследование фазовых диаграмм сильно взаимодействующей материи — одна из самых стимулирующих областей современной физики высоких энергий [197]. Особый интерес вызывают фазовые переходы, которые, как ожидают, произойдут при высоких температурах и (или) высоких барионных плотностях. Эти фазы играли важную роль в ранней Вселенной и, возможно, существуют в ядрах нейтронных звезд [270].

Открытие этого фазового перехода пролило бы свет на фундаментальные, но все еще не решенные проблемы квантовой хромодинамики (QCD), связанные с нарушениями симметрии. В частности, при высоких плотностях барионов можно ожидать возникновения новых фаз сильно взаимодействующей материи. Научное продвижение этой захватывающей области при высоких плотностях барионов



**Рис. 1.4.** Фазовые диаграммы сильно взаимодействующего вещества как функция, связывающая температуру вещества и химический потенциал барионов. Результаты столкновений тяжелых ионов в фазовой диаграмме QCD (квантовой хромодинамики), рассчитанной по модели трехмерной гидродинамики [197]

дают новые экспериментальные данные. Для исследования динамики сильно взаимодействующей материи, вдали от его нынешнего основного состояния, лабораторные эксперименты выполняются при столкновениях ядер атомов при высоких энергиях. Условия в коротечно существующей плазме, образующейся при столкновениях, отражены в распределениях испускаемых адронов. Вычисления в QCD при исчезающем бариохимическом потенциале и конечной температуре предсказывают формирование кварк-глюонной плазмы при плотностях энергии более  $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ . Такие условия могут быть созданы в лобовых столкновениях между тяжелыми ядрами уже при энергиях бомбардировки около  $10 \text{ AGeV}$  (см. рис. 1.4).

### § 6. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ, УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА И СМОЛУХОВСКОГО

Остановимся сначала на связи уравнений кинетики с уравнениями сплошной среды, следуя [48, 177, 178].

Проекционные методы в задачах физической кинетики традиционно связаны с изучением цепочки уравнений для моментов плотно-

сти функции распределения частиц

$$u_i = \langle f, \mu_i \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f^{(\omega)} \mu_i(d\omega), \quad i \in \mathbb{N},$$

где борелевы меры  $\mu_i, i \in \mathbb{N}$ , определяются характером макроскопического описания системы. Как правило, эти меры связаны с соотношениями сохранения или диссипации, выполняющимися для оператора столкновений частиц. Классическая задача статистической физики — это исследование перехода от уравнения Больцмана к уравнениям газодинамики (гидродинамики), проблема, восходящая к работам Максвелла [116, 241]. В частности, центральным вопросом здесь является проблема замыкания моментной цепочки для решений уравнения Больцмана.

Пусть непрерывная функция  $\Phi$  удовлетворяет условиям

$$\Phi(v, v_1, q) = \Phi(v', v'_1, q') \geq 0,$$

$$\forall q \in \Sigma_2 = \{q \in \mathbb{R}_3: q^2 = 1\}, \quad v, v_1 \in \mathbb{R}_3,$$

где

$$\begin{aligned} v' &= v - q(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_3}, & v'_1 &= v_1 + q(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_3}, \\ q' &= -q, & q &\in \Sigma_2 = \{q \in \mathbb{R}_3: q^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Это преобразование связывает скорости  $v, v_1$  молекул (имеющих одинаковые массы) до столкновения и их скорости  $v', v'_1$  после столкновения. Здесь  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}_3}$  — скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}_3$ . Вектор  $q$  — это единичный вектор, соединяющий центры бильярдных шаров в момент столкновения. Якобиан этого преобразования столкновений бильярдных шаров в восьмимерном пространстве равен 1 [88].

Рассмотрим кинетическое уравнение Больцмана

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(v, x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(vf(v, x, t)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}_3} \int_{\Sigma_2 \{q \in \mathbb{R}_3: q^2=1\}} \Phi(v, v_1, q) [f(v', x, t)f(v'_1, x, t) - \\ & \quad - f(v, x, t)f(v_1, x, t)] dv_1 dq. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Умножим обе части этого уравнения на непрерывную функцию  $\varphi(v)$  и проинтегрируем по переменной  $v \in \mathbb{R}_3$ , предполагая сходимость всех получающихся интегралов на решении  $f$ . Учитывая

равенство единице якобиана столкновений, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \varphi f(v, x, t) dv + \operatorname{div}_x \left( \int \varphi(v) f(v, x, t) dv \right) = \\ & = \frac{1}{4} \int \Phi \{ \varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1 \} (f' f'_1 - f f_1) dv dv_1 dq, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} f &= f(t, x, v), & f_1 &= f(t, x, v_1), & f' &= f(t, x, v'), & f'_1 &= f(t, x, v'_1), \\ \varphi &= \varphi(v), & \varphi_1 &= \varphi(v_1), & \varphi' &= \varphi(v'), & \varphi'_1 &= \varphi(v'_1), \end{aligned}$$

а интегрирование распространяется на все значения скоростей в одностичном фазовом пространстве.

Если функция  $\varphi$  равна одной из пяти функций  $\varphi^{(i)}$ ,  $0 \leq i \leq 4$ , (инварианты столкновений):

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(v) &= 1, & \varphi^{(i)}(v) &= v^{(i)}, & 1 \leq i \leq 3, & \varphi^{(4)}(v) &= |v|^2, \\ \forall v &= (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}) \in \mathbb{R}_3, & v^2 &= \sum_{i=1}^3 v^{(i)2}, \end{aligned}$$

то выполняется соотношение

$$\{ \varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1 \} \equiv 0.$$

То есть для инвариантов столкновений правая часть соотношения (1.14) обращается в тождественный ноль. Таким образом, незамкнутая, вообще говоря, система уравнений газодинамики, получается интегрированием обеих частей уравнения Больцмана по пяти абсолютно непрерывным мерам, пропорциональным мере Лебега на  $v \in \mathbb{R}_3$  с коэффициентами из инвариантов столкновений:

$$\mu_0(dv) = dv, \quad \mu_i(dv) = v^{(i)} dv, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \mu_4(dv) = |v|^2 dv, \quad v \in \mathbb{R}_3.$$

Примем для удобства записей компактные обозначения для частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_{x_i}.$$

В предположении достаточно быстрого стремления решения уравнения Больцмана (1.13) к нулю, когда  $v \rightarrow \infty$ , и, следуя определению связи решения уравнения Больцмана с макроскопическими параметрами газа в [177, 178], интегрированием по перечисленным мерам получаем формальную систему уравнений газовой динамики:

— закон сохранения массы:

$$\partial_t \rho + \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} (\rho \bar{v}_i) = 0,$$



— закон сохранения  $i$ -й проекции импульса:

$$\partial_t(\rho\bar{v}_j) + \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j + P_{i,j}) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

— закон сохранения энергии:

$$\partial_t \left[ \rho \left( \frac{\bar{v}^2}{2} + e \right) \right] + \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \left[ \rho\bar{v}_i \left( \frac{\bar{v}^2}{2} + e \right) + \sum_{j=1}^3 P_{i,j}\bar{v}_j + q_i \right] = 0,$$

где

$$\rho = \int_{\mathbb{R}_3} f \mu_0(dv), \quad \rho\bar{v}_i = \int_{\mathbb{R}_3} f \mu_i(dv), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

$$\rho e = \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}_3} f \mu_4(dv) - \rho\bar{v}^2 \right), \quad e = \frac{3}{2}RT, \quad R = \text{const} > 0,$$

$$P_{i,j} = \int_{\mathbb{R}_3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f \mu_0(dv), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

$$q_i = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_3} (v_i - \bar{v}_i)(v - \bar{v})^2 f \mu_0(dv), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

В гидродинамике построенные средние величины называют *макроскопическими параметрами* и интерпретируют следующим образом:  $\rho$  — плотность массы вещества газа,  $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  — массовая (гидродинамическая) скорость,  $T$  — абсолютная температура газа,

$P = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 P_{i,i}$  — давление газа,  $e$  — внутренняя энергия единицы массы газа,  $q$  — тепловой поток. Незамкнутость приведенной системы уравнений обусловлена тем, что не задана связь тензора напряжений  $P_{i,j}$  и вектора теплового потока  $q$  с макроскопическими величинами  $\rho, \bar{v}, T$ .

При любом макроскопическом подходе к динамике газа приходится постулировать (на основе экспериментов или иным способом) некоторые соотношения (так называемые определяющие уравнения) между величинами  $P_{i,j}$  и  $q$  с одной стороны, и  $\rho, \bar{v}, T$  — с другой.

Широко приняты две следующие модели связей.

1°. Модель Эйлера (идеальный газ)

$$P_{i,j} = P\delta_{i,j}, \quad P = R\rho T, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

$$q_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

2°. Модель Навье—Стокса—Фурье (вязкий теплопроводный газ)

$$P_{i,j} = P\delta_{i,j} - \mu(\partial_{x_i}\bar{v}_j + \partial_{x_j}\bar{v}_i) - \lambda \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}\bar{v}_k\delta_{i,j},$$

$$P = R\rho T, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad ,$$

$$q_i = -\kappa\partial_{x_i}T, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

где  $\lambda, \mu$  — коэффициенты вязкости,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Значения  $\lambda, \mu, \kappa$  могут быть функциями плотности  $\rho$  и температуры  $T$ ,  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера.

Несмотря на незамкнутость системы моментных уравнений для общего случая уравнения Больцмана, существуют частные классы решений в виде бегущей волны, для которых первые пять моментов в точности подчиняются моделям 1°, 2°.

Исследование моделей кинетики газов и условия перехода от кинетики к уравнениям газовой динамики восходит к Д. Гильберту, Т. Карлеману [88], и представляет предмет современных интенсивных исследований.

Непосредственной подстановкой в уравнение Больцмана (1.13) убеждаемся, что его решением является бегущее *локальное максвелловское распределение*

$$f(v, x, t) = \text{const} \cdot \exp\{-[x - v(t - t_0)]^2\}, \quad v, x \in \mathbb{R}_3, \quad t > 0.$$

Общий подход к выделению решений такого вида был предложен А. А. Никольским [126].

В этом случае в соответствии со сделанными определениями для макроскопических параметров газа выполняются тождества

$$\rho = \text{const} |t - t_0|^{-3}, \quad v = x(t - t_0)^{-1}, \quad \rho e = \text{const} |t - t_0|^{-5}, \\ T = \text{const} |t - t_0|^{-2}, \quad q = 0.$$

Данные функции удовлетворяют системам уравнений моделей 1°, 2° всюду, кроме момента времени  $t = t_0$  (решение В. С. Галкина [64]). То есть для выделенного класса решений уравнения Больцмана возможна ситуация, когда макроскопические параметры обращаются в бесконечность сразу во всем координатном пространстве  $\mathbb{R}_3$ .

Эти особенности не являются локально суммируемыми, что требует дополнительных построений при расширении понятия обобщенных решений по С. Л. Соболеву для систем 1°, 2°.

В связи с введенными определениями макроскопических параметров полезно рассмотреть простейшую модель одномерного бесстолкновительного газа с приведенными выше примерами решений

уравнений газовой динамики. Предположим, что молекулы газа имеют одинаковые массы  $m > 0$  и движутся вдоль оси  $Ox = \mathbb{R}$  без столкновений с постоянными значениями скорости  $v_1 = v_0 \geq 0$  либо  $v_2 = -v_0 \leq 0$ . Тогда кинетическое уравнение для такого газа для функции распределения молекул по скоростям  $f_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , представляет собой систему двух уравнений Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_1 + v_1 \frac{\partial}{\partial x} f_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} f_2 + v_2 \frac{\partial}{\partial x} f_2 = 0, \end{cases} \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad \Omega = \{1, 2\}.$$

На множестве состояний — скоростей частиц  $\Omega$  — определим меру  $\mu$  соотношениями  $\mu(\omega) = 1$ ,  $\omega = 1, 2$ . Тогда в соответствии с принятыми обозначениями имеем:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= [f_1(x, t) + f_2(x, t)]; \\ \rho(x, t)\bar{v}(x, t) &= [v_1 f_1(x, t) + v_2 f_2(x, t)]; \\ \rho(x, t)e(x, t) &= \frac{1}{2}[(v_1 - \bar{v}(x, t))^2 f_1(x, t) + (v_2 - \bar{v}(x, t))^2 f_2(x, t)]; \\ e(x, t) &= \frac{3}{2}RT(x, t); \\ P(x, t) &= \frac{1}{3}[(v_1 - \bar{v}(x, t))^2 f_1(x, t) + (v_2 - \bar{v}(x, t))^2 f_2(x, t)]; \\ q(x, t) &= \frac{1}{2}[(v_1 - \bar{v}(x, t))^3 f_1(x, t) + (v_2 - \bar{v}(x, t))^3 f_2(x, t)]. \end{aligned}$$

Так как в силу этих соотношений на решении системы справедливо тождество  $P = (2/3)\rho e$ , то для рассматриваемой модели получаем стандартное уравнение состояния идеального газа  $P = R\rho T$  — уравнение Клапейрона—Менделеева.

В соответствии с примером о сталкивающихся встречных пучках газа предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  выполняются соотношения

$$f_1(x, 0) = \rho_0(1 - \theta(x)), \quad f_2(x, 0) = \rho_0\theta(x),$$

где  $\rho_0 = \text{const} > 0$  — начальная макроскопическая плотность газа; функция Хевисайда определяется соотношением

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае имеем:

$$f_1(x, t) = \rho_0(1 - \theta(x - v_1 t)), \quad f_2(x, t) = \rho_0\theta(x - v_2 t).$$

С учетом предположений о значениях скоростей

$$v_1 = v_0 \geq 0 \quad \text{и} \quad v_2 = -v_0 \leq 0$$

для макроскопических параметров рассматриваемого газа получаем следующие функции:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 2\rho_0, & |x| \leq v_0 t, \\ \rho_0, & |x| > v_0 t, \end{cases}$$

$$\bar{v}(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| \leq v_0 t, \\ -v_0, & x > v_0 t, \\ v_0, & x < -v_0 t, \end{cases}$$

$$T(x, t) = \begin{cases} \frac{v_0^2}{3R}, & |x| \leq v_0 t, \\ 0, & |x| > v_0 t, \end{cases}$$

$$q(x, t) = 0.$$

Эти функции удовлетворяют модели Эйлера 1° идеального газа, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности равны нулю.

Обратимся к известным классам решений уравнения Больцмана. Отметим, что соотношения сохранения импульса и кинетической энергии, выполняющиеся при вышеупомянутых столкновениях молекул, позволяют выделить так называемое решение Максвелла [177, 178] (локальное максвелловское распределение молекул по скоростям):

$$f_M(v, x, t) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \rho \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} (v - \bar{v})^2 \right\},$$

куда входят так называемые макроскопические характеристики газа:  $\bar{v}(x, t)$  — гидродинамическая скорость течения газа,  $\rho(x, t)$  — плотность газа,  $T(x, t)$  — абсолютная температура газа. Величина

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

— постоянная Больцмана,  $m > 0$  — масса молекулы. Распределение было получено Дж. К. Максвеллом в 1859 г. еще до появления уравнения Больцмана (1872 г.) для случая равновесных газов, когда макроскопические характеристики  $\bar{v}$ ,  $\rho$ ,  $T$  не зависят от пространственных координат  $x$  и времени  $t$ . При этом для давления газа  $P$  выполняется соотношение  $P = R\rho T$  (уравнение состояния Клапейрона—Менделеева),  $R = k/m$  — газовая постоянная.

Существует важный случай локально-максвелловских решений  $f_M$ , когда макроскопические величины зависят от  $x, t$ . Тогда

$$\begin{aligned}\bar{v}(x, t) &= \frac{\beta(t - t_0)}{\alpha + \beta(t - t_0)^2} x, \\ \rho(x, t) &= c \left( \frac{\pi}{\alpha + \beta(t - t_0)^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta(t - t_0)^2} x^2 \right), \\ T(x, t) &= \frac{1}{2k(\alpha + \beta(t - t_0)^2)},\end{aligned}\quad (1.15)$$

где  $\alpha, \beta, c$  — положительные постоянные. Нетрудно убедиться, что такая функция  $f_M$  удовлетворяет уравнению Больцмана с произвольным характером столкновений молекул, задаваемым ядром  $\Phi$  в операторе (1.5). Отметим, что для данного класса решений оператор столкновений Больцмана (1.5) обращается в тождественный ноль. Если параметр  $\alpha$  стремится к 0, то указанные макроскопические газовые переменные  $\rho, T, \bar{v}$  переходят в решения В. С. Галкина [64] для полной системы уравнений Навье—Стокса, см. также [93].

А. В. Бобылеву [13, 14] удалось найти важный класс автомодельных решений пространственно однородного уравнения Больцмана (пространственная однородность означает, что решение уравнения Больцмана  $f = f(v, x, t)$  не зависит от пространственных координат  $x$ ) для специального случая так называемых максвелловских молекул, которые характеризуются выбором ядра  $\Phi$  в операторе столкновений Больцмана (1.5) в виде

$$\Phi(v, v_1, q) = G \left( \frac{1}{\|v - v_1\|_{\mathbb{R}_3}} (v - v_1, q)_{\mathbb{R}_3} \right) \geq 0,$$

где  $G$  — непрерывная функция. В этом случае решение А. В. Бобылева имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}f(v, t) &= (2\pi\tau)^{-3/2} \exp \left( -\frac{v^2}{2\tau} \right) \left( \frac{1 - \tau}{2\tau^2} v^2 + \frac{5\tau - 3}{2\tau} \right), \\ \tau &= \tau(t) \equiv 1 - \theta \exp(-\lambda t), \quad t \geq 0, \quad \lambda = \int_{-1}^1 G(s)(1 - s^2) ds,\end{aligned}$$

причем значения  $f(v, t) \geq 0$ , если выполнено ограничение

$$0 \leq \theta \leq 0.4,$$

что соответствует физическому содержанию функции  $f$ . Метод получения этого решения основан на преобразовании Фурье функции  $f$  в пространстве скоростей.

Данное решение является важным открытием в теории уравнения Больцмана и весьма существенно для тестирования вычислительных алгоритмов, используемых при моделировании течений газов.

На основе метода А. А. Никольского [126] в сочетании с вышеуказанным решением А. В. Бобылева получается содержательный пример решения уравнения Больцмана с оператором столкновений (1.5), отличным от тождественного нуля. Для максвелловских молекул примером такого решения служит функция

$$f(v, x, t) = \left( \frac{1}{2\pi\tilde{\tau}} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{[x - (t - t_0)v]^2}{2\tilde{\tau}} \right) \times \\ \times \left( \frac{1 - \tilde{\tau}}{2\tilde{\tau}^2} [x - (t - t_0)v]^2 + \frac{5\tilde{\tau} - 3}{2\tilde{\tau}} \right), \\ \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(t) \equiv 1 - \theta \exp \left( - \frac{\lambda}{2(t - t_0)^2} \right), \quad t \geq 0, \\ \lambda = \int_{-1}^1 G(s)(1 - s^2) ds, \quad 0 \leq \theta \leq 0.4.$$

Следует подчеркнуть, что макроскопические газовые переменные в этом случае совпадают с решением В. С. Галкина [64] для системы Навье—Стокса с уравнением состояния газа  $P = R\rho T$ , и получаются из (1.15) приравниваем величины  $\alpha$  к 0:

$$\bar{v}(x, t) = \frac{1}{t - t_0} x, \quad \rho(x, t) = \frac{c_\rho}{|t - t_0|^3}, \quad T(x, t) = \frac{C_T}{(t - t_0)^2},$$

где  $c_\rho$ ,  $C_T$  — положительные постоянные, а соответствующие значения вектора потока тепла  $q(x, t)$  равны 0.

Примером решения пространственно однородного уравнения Больцмана в случае ортогональных столкновений молекул с фазовым пространством  $v \in \mathbb{R}_2$  (двумерная плоскость) с оператором столкновений (1.7) (см. [63]) при интенсивности столкновений  $\Phi = 1$  является функциональное решение в виде меры, состоящей из абсолютно непрерывной компоненты с нестационарным максвелловским распределением, и атомарной меры, эволюционирующей при  $t \rightarrow +\infty$  к мере Дирака  $\delta_0(dv)$ :

$$f(dv, t) = \frac{1}{\pi \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)^2} \exp \left( - \frac{v^2}{1 + \frac{t}{2\pi}} \right) dv + \frac{t}{2\pi + t} \delta_0(dv).$$

Приведенная формула описывает «перекачку» вещества из подвижной компоненты газа в неподвижную относительно системы

отсчета, связанной с центром масс системы частиц. Эта формула является примером функционального решения задачи Коши для уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.7) при непрерывных начальных данных (распределение Максвелла) [52, 56]. Очевидно, что для этого решения выполняются законы сохранения массы, сохраняется средняя кинетическая энергия, средний импульс равен нулю. Масса вещества в подвижной компоненте (совпадающая с вероятностью обнаружения частицы в подвижной компоненте газа)

$$\rho(t) = \frac{1}{1 + \frac{t}{2\pi}};$$

полная масса неподвижной компоненты (вероятность обнаружения частицы в неподвижной компоненте газа) равна  $t/(2\pi + t)$ ; температура неподвижной компоненты равна нулю. При этом температура газа  $T^\circ(t)$  сосредоточена в подвижной компоненте и растет с течением времени по закону

$$T^\circ(t) \sim 1 + \frac{t}{2\pi}.$$

Выполняется уравнение состояния Клапейрона—Менделеева  $P \sim \rho T$ . Давление газа на приведенном решении не зависит от времени  $P \equiv \text{const}$ .

Рассмотрим примеры описания газа при помощи макроскопических параметров. Приведенный ниже пример лежит в основе построения функционального решения полной системы газовой динамики для идеального газа с естественной вязкостью [214]. Рассмотрим одномерную систему газовой динамики в эйлеровых координатах ( $x \in \mathbb{R}$  — одномерная пространственная переменная,  $t$  — время), записанную в переменных  $\rho(x, t)$  — плотность газа,  $\bar{v}(x, t)$  — гидродинамическая скорость течения газа,  $T(x, t)$  — абсолютная температура газа,  $P$  — давление,  $e$  — удельная внутренняя энергия:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{v}^2 + P) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x} \bar{v} \right), \quad P = R \rho T,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\bar{v}^2}{2} + e \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \bar{v} \left( \frac{\bar{v}^2}{2} + e \right) + P \bar{v} - \mu \bar{v} \frac{\partial}{\partial x} \bar{v} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial}{\partial x} T \right),$$

$$e = \frac{3}{2} RT, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_1,$$

где коэффициенты вязкости и теплопроводности  $\mu, \kappa \geq 0$  являются физическими характеристиками среды, а  $R$  — газовая постоянная.

Следуя вычислениям [178, с. 224] для коэффициентов  $\mu, \kappa$ , отметим, что в случае локально постоянных по пространственной переменной  $x \in \mathbb{R}$  плотности и температуре справедливы следующие выражения:

$$\mu(\rho, T, x, t) = \frac{1}{2}R \int_{x-l}^{x+l} T(x, t)\rho(x, t) dx,$$

$$\kappa(T, \rho, x, t) = \frac{5}{4}R \int_{x-l}^{x+l} T^2(x, t)\rho(x, t) dx,$$

где величина  $l(\rho, T) > 0$  — длина свободного пробега молекул газа, считается «малым параметром» в системе газовой динамики. Длинной свободного пробега является средняя длина пути, проходимого частицей между двумя столкновениями. (В обычных газах, находящихся при нормальном атмосферном давлении, величина  $l$  имеет порядок  $10^{-5}$  см.)

При этом следует потребовать локальное постоянство подынтегральных выражений для плотности и температуры на масштабе свободного пробега  $l$ . Введенные выражения позволяют обобщить формулы для коэффициентов  $\mu, \kappa$ , когда пространственный перенос приводит к не абсолютно непрерывным распределениям плотности вещества, рассмотренным в предыдущем разделе для уравнения Лиувилля в случае разрывных скоростей переноса вещества. Заменим в вышеприведенных формулах для коэффициентов абсолютно непрерывную меру  $\rho(x, t) dx$  на распределение в виде меры по пространственной переменной  $\rho(dx, t)$ :

$$\mu(\rho, T, x, t) = \frac{1}{2}R \int_{x-l}^{x+l} T(x, t) \rho(dx, t),$$

$$\kappa(T, \rho, x, t) = \frac{5}{4}R \int_{x-l}^{x+l} T^2(x, t) \rho(dx, t).$$

Очевидно, что интегрирование по мере  $\rho(dx, t)$  в случае, когда мера  $\rho$  абсолютно непрерывная по мере Лебега, приводит к стандартным выражениям [178]. Пусть при  $t = 0$  заданы следующие начальные условия:

$$\bar{v}(x, 0) = -\operatorname{sgn}(x)v_0, \quad T(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_1,$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_0 = \text{const}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \rho_0 \geq 0, \quad v_0 \geq 0.$$



Прямыми вычислениями нетрудно убедиться, что в рамках определения обобщенного решения С. Л. Соболева рассматриваемой задаче Коши удовлетворяют следующие функции как распределения:

$$\begin{aligned}\bar{v}(x, t) &= -\operatorname{sgn}(x)v_0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_1, \\ \rho(x, t) &= \begin{cases} \rho_0, & x \neq 0, \\ 2tv_0\rho_0\delta_0, & x = 0, \end{cases} \quad t \geq 0, \\ T(x, t) &= \begin{cases} \frac{v_0^2}{3R}, & x = 0, \quad t > 0, \\ 0, & x \neq 0, \quad t > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Здесь  $\delta_0$  — обобщенная функция Дирака, сосредоточенная в точке  $x = 0$ .

Как и в предыдущем разделе, уравнение сохранения массы для рассматриваемого поля скоростей превращает абсолютно непрерывное распределение масс  $\rho|_{t=0}$  в атомарную меру Дирака, сосредоточенную в начале координат. Это приводит к значительному влиянию коэффициента вязкости  $\mu$  в окрестности точки  $x = 0$ .

Очевидно, что это решение удовлетворяет физическим законам сохранения массы, импульса, энергии. Оно соответствует модели динамики с разрывным полем скоростей из предыдущего раздела для потоков частиц, мгновенно останавливающихся в начале координат  $x = 0$ . В начальный момент времени  $t = 0$ , см. рис. 1.5, два встречных пучка холодного газа при нулевой абсолютной температуре, не вступая во взаимный контакт, встречаются в начале координат, где газ отсутствует. Далее при значениях времени  $t > 0$  встречные пучки газа сталкиваются в точке  $x = 0$ , и за счет вязкого трения  $\mu > 0$  в начале координат скачкообразно происходит интенсивный разогрев газа и там образуется «конденсат» частиц, описываемый в распределении плотности массы по пространству дельта-функцией Дирака. Очевидно, в момент времени  $t$  масса

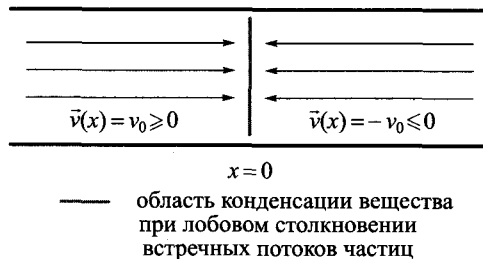


Рис. 1.5. Столкновение встречных потоков газа

конденсата равна  $2tv_0\rho_0$  и совпадает с массой газа, влетевшего со скоростью  $v_0$  за время  $t$  с обеих сторон в точку  $x = 0$ .

Налетающий газ остается холодным в точках  $x \neq 0$ . Холодный газ, поступаая в начало координат, скачкообразно разогревается до температуры

$$T_0 = v_0^2(3R)^{-1},$$

а увеличение внутренней энергии конденсата газа, сосредоточенного в точке  $x = 0$ , происходит при этой фиксированной температуре за счет преобразования кинетической энергии влетающего в эту точку вещества в тепловую энергию конденсата. Описанный выше конденсат ведет себя аналогично черной дыре, помещенной в точку  $x = 0$ , которая поглощает окружающую материю.

Аналогичные явления имеют место в задачах физической кинетики, которые рассмотрим ниже. Важной спецификой, характеризующей этот класс математических явлений, является отсутствие непрерывности операторов, входящих в законы сохранения, в естественных нормах суммируемых функций, определяемых этими законами. Именно это служит основной причиной возникновения функциональных решений.

Ниже рассматривается задача Коши для конечномерных и бесконечномерных систем

$$\begin{aligned} \partial_t f_0^{(\omega)}(u, x, t) + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_j^{(\omega)}(u, x, t) - f_{n+1}^{(\omega)}(u, x, t) &= 0, \\ \omega \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1.16}$$

относительно вектора неизвестных  $u \in \mathbb{R}_m$ . Рассмотрим пространство

$$\mathbb{R}_m = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_1 \times \dots, \quad 1 \leq m \leq \aleph_0,$$

которое снабжено топологией произведения; функции

$$f_j^{(\omega)}: \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m, \quad 0 \leq j \leq n + 1,$$

предполагаются борелевыми отображениями.

Отметим специфику бесконечномерного случая, принципиально отличающегося от конечномерного. А именно, бесконечномерные системы могут иметь негладкие особенности при сколь угодно гладких начальных данных и постоянных коэффициентах в уравнениях [37].

Этот эффект для систем (1.16) сугубо бесконечномерный, ибо конечномерные линейные системы таким свойством не обладают.

**Пример 1.1.** Рассмотрим бесконечномерную линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{i}{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_1, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Такая система, например, получается из уравнения Больцмана для одномерного бесстолкновительного газа

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v, x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (vf(v, x, t)) = 0, \quad v, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Если положить

$$u_i(x, t) = i \int_{-\infty}^{+\infty} v^i f(v, x, t) dv, \quad i \in \mathbb{N},$$

то для функций  $u_i$  получается вышеуказанная бесконечномерная система.

Подчиним начальные данные в задаче Коши для этой системы следующему требованию:

$$u|_{t=0} = \exp(iu_0^{(0)}(x)), \quad x \in \mathbb{R}_1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Функции

$$u_i(x, t) = \exp(iu_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}_1, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

являются решением поставленной задачи Коши, если функция  $u_0$  — решение задачи Коши для скалярного квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + \exp(u_0) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_1,$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0^{(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R}_1.$$

Поскольку для решений этой задачи типичным свойством является возникновение особенностей при сколь угодно гладкой начальной функции  $u_0^{(0)}$  [142, 224, 225], то таким же свойством обладает решение бесконечномерной задачи.

Приведенный пример указывает на существование глубокой связи бесконечномерных линейных систем (1.16) с конечномерными квазилинейными системами.

Бесконечномерные полулинейные системы вида (1.16) могут возникать в процессе применения проекционных методов для уравнений физической кинетики.

Квазилинейные уравнения типа Хопфа типичны для кинетической теории коагуляции. Преобразование Лапласа уравнения Смолуховского по массам частиц приводит в ряде случаев к интересным задачам для квазилинейных уравнений, к которым мы обратимся в гл. 8.

Ниже приведем примеры решений задачи Коши для пространственно однородного уравнения Смолуховского с различными интенсивностями взаимодействия частиц системы  $\Phi(x, y)$  и начальными данными  $u_0(x)$ .

**Пример 1.2.** Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^x \Phi(x - y, y) u(x - y, t) u(y, t) dy - \\ - u(x, t) \int_0^\infty \Phi(x, y) u(y, t) dy, \\ u_0(x) = u(x, 0), \end{cases}$$

где интенсивность взаимодействия частиц зададим следующим соотношением:

$$\Phi(x, y) = x + y.$$

Для решения этой задачи Коши используется преобразование Лапласа по массовой переменной  $x$ :

$$F(p, t) = \int_0^\infty \exp(-px) \varphi(x, t) dx.$$

Соответствующее уравнение для функции  $F$  имеет вид

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} + F(0, t) \frac{\partial F(p, t)}{\partial p} - 2F(p, t) \frac{\partial F(0, t)}{\partial p} = 0.$$

С учетом экспоненциальных начальных данных  $u(x, 0) = \exp(-x)$  решение Головина [71–74] имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{\exp(-t)}{x\sqrt{1 - \exp(-t)}} I_1((2x\sqrt{1 - \exp(-t)}) \exp(-x(2 - \exp(-t)))) , \\ x > 0, \quad t > 0,$$

где  $I_1$  — функция Бесселя.

**Пример 1.3.** Если интенсивность взаимодействия частиц является мультипликативной функцией:

$$\Phi(x, y) = xy,$$

то для образа преобразования Лапласа  $F$  функции  $xf(x, t)$ , где  $f$  — решение уравнения Смолуховского, получаем нелокальное уравнение Хопфа:

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} + [F(p, t) - F(0, t)] \frac{\partial F(p, t)}{\partial p} = 0.$$

Для случая когда начальные данные в задаче Коши

$$u_0(x) = x^{-1} \exp(-x),$$

имеем [37]:

$$u(x, t) = \begin{cases} x^{-2} t^{-1/2} I_1(2xt^{-1/2}) \exp(-x(1+t)), & 0 \leq t \leq 1, \\ x^{-2} t^{-1/2} I_1(2xt^{-1/2}) \exp(-2xt^{-1/2}), & t \geq 1. \end{cases}$$

**Пример 1.4.** Рассмотрим ядро  $\Phi(x, y) = 1$ . Используя преобразование Лапласа по переменной  $x$  для начального условия

$$u_0(x) = \exp(-x),$$

получаем автомодельное решение Мюллера [163, 251] задачи Коши для уравнения Смолуховского:

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + \frac{t}{2})^2} \exp\left(-\frac{x}{1 + \frac{t}{2}}\right).$$

Концентрация частиц в этом случае определяется выражением

$$n(t) = \int_0^{\infty} u(y, t) dy = \frac{1}{1 + \frac{t}{2}}.$$

Наряду с рассмотренными выше примерами классических решений, для уравнений больцмановского типа возможны ситуации, когда существуют только функциональные решения, а классические и обобщенные решения отсутствуют.

Предположим, состояния частиц описываются их массой

$$0 \leq \omega < \infty,$$

частицы при парных столкновениях гибнут с интенсивностью  $\Phi = 1$ , но в то же время в системе действует постоянный источник частиц с интенсивностью  $q = 1$ . Для концентрации частиц  $u^{(\omega)}(t)$  в системе имеем следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(t)}{\partial t} = -u^{(\omega)}(t) \int_{\mathbb{R}^+} u^{(\omega')}(t) d\omega' + q^{(\omega)}, \quad t > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+, \\ u^{(\omega)}(0) = u_0.$$

Считаем, что в начальный момент времени частицы в системе отсутствуют, т. е.  $u_0 = 0$ .

Покажем, что данная задача Коши не имеет классических и обобщенных решений. Обозначим

$$n(t) = \int_{\mathbb{R}^+} u^{(\omega')}(t) d\omega'.$$

Если предположить существование решения, то справедливо тождество

$$u^{(\omega)}(t) = \int_0^t \exp\left(-\int_{\tau}^t n(s) ds\right) d\tau > 0, \quad t > 0.$$

Правая часть полученного тождества не зависит от  $\omega$ , и, следовательно, величина  $n(t)$  равна  $+\infty$  при любом  $t > 0$ . Но тогда  $u(t) \equiv 0$  при  $t \geq 0$ . Очевидно, полученная функция не является решением рассматриваемой задачи Коши. Но тем не менее это функциональное решение, которое является пределом аппроксимаций, основанных на замене бесконечных пределов интегрирования в интегральном члене на конечные с последующим устремлением их в бесконечность, что естественно с физической точки зрения при моделировании рассматриваемой системы. Такой же результат получается для приближений, полученных при решении неявной разностной схемы.

Задача Коши для уравнения Смолуховского с постоянным источником  $q = 1$ , постоянной интенсивностью слияния частиц  $\Phi = 1$  и нулевыми начальными условиями полностью воспроизводит результат предыдущего примера, что можно установить аналогичными рассуждениями.

## § 7. ДВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТОЛКНОВЕНИЙ БИЛЬЯРДНЫХ ШАРОВ, ПРИВОДЯЩИЕ К РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Пусть частицы физической системы занумерованы натуральными числами  $1 \leq i \leq N$ ,  $N \geq 1$ . Каждому номеру  $i$  могут соответствовать величины скорости  $v^i \in \mathbb{R}_n$ , где  $\mathbb{R}_n$  — фазовое пространство рассматриваемой модели,  $n = 2, 3$ .

Пусть значения времени  $t$  принимают дискретные значения

$$t_n = n\tau, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad \tau > 0.$$

Частицы в момент времени  $t_n$  могут участвовать в парных взаимодействиях по закону столкновений бильярдных шаров:

$$\begin{aligned} v' &= v - q(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_n}, \quad v'_1 = v_1 + q(v - v_1, q)_{\mathbb{R}_n}, \\ \forall q \in \Sigma_2 &= \{q \in \mathbb{R}_n : (q, q)_{\mathbb{R}_n} = 1\}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Акты парных столкновений и изменение скоростей при столкновении разыгрываются следующим образом. Рассмотрим множество  $\Delta$ , состоящее из пар номеров частиц  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ . В каждый момент времени  $t_n$  разыгрываются независимые случайные величины  $\pi^{(s)}(t_n)$  со значениями в множестве  $\Delta$ . При этом вероятность выбора пары

$$P \left\{ \pi^{(s)}(t_n) = (i, j) \right\}$$

равна

$$\frac{1}{C_N^2}, \quad 1 \leq s \leq Q(N),$$

где величина  $Q(N)$  определяет количество повторных розыгрышей в данный момент времени. Возможные пары сталкивающихся частиц в момент времени  $t_n$  выберем как значения набора

$$\left\{ \pi^{(s)}(t_n) \right\}_{s=1}^{Q(N)},$$

накладывая дополнительное ограничение: если хотя бы один из номеров, входящих в пару  $\pi^{(s)}(t_n)$  при  $s \geq 2$ , входит в одну из пар

$$\pi^{(1)}(t_n), \dots, \pi^{(s-1)}(t_n),$$

то для пары  $\pi^{(s)}(t_n)$  закон преобразования скоростей (1.17) в момент времени  $t_n$  не происходит. Тем самым исключаются многократные взаимодействия для каждой частицы в момент времени  $t_n$ .

Возможность преобразования скоростей для выбранных выше-указанным способом пар номеров сталкивающихся частиц определим розыгрышем совокупности независимых случайных величин  $\eta_{i,j}(t_n)$ ,  $(i, j) \in \Delta$ , принимающих два значения: 0 и 1. Значение 0 означает запрет преобразования скоростей, а 1 — наличие преобразования скоростей (1.17) для пары частиц с номерами  $(i, j)$  в момент времени  $t_n$ . Розыгрыш этих значений подчиним следующим правилам. Значения случайной величины  $\eta_{i,j}(t_n)$  задаются условной функцией распределения

$$\begin{aligned} P\{\eta_{i,j}(t_n) = 1\} &= \Phi(v^i, v^j)\tau \leq 1, \\ P\{\eta_{i,j}(t_n) = 0\} &= 1 - \Phi(v^i, v^j)\tau, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$0 \leq \Phi(v^i, v^j) = \Phi(v^j, v^i)$$

— заданная интенсивность столкновений частиц, которая предполагается финитной функцией. Направление вектора  $q$  в формуле (1.17), который принадлежит единичной сфере в  $\mathbb{R}_n$ , выбираем

на основе случайного розыгрыша точки, равномерно распределенной на указанной сфере.

Если пара  $(i, j) \in \Delta$  выбрана и значение  $\eta_{i,j}(t_n) = 1$ , то значение векторов скоростей для выбранной пары преобразуется по закону (1.17). При этом значения скоростей остальных частиц в системе остаются неизменными. Если же  $\eta_{i,j}(t_n) = 0$ , то значения скоростей для всех частиц системы остаются неизменными. Указанная процедура выполняется для всех пар выбранных номеров последовательным перебором

$$\pi^{(1)}(t_n), \dots, \pi^{(Q(N))}(t_n).$$

Пусть фазовое пространство скоростей  $\mathbb{R}_n$  является объединением непересекающихся ячеек  $D_v$  положительной лебеговой меры  $\text{mes}(D_v)$ . Рассмотрим числа заполнения ячейки  $D_v$ :

$$N_v(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i: v^i \in D_v} 1.$$

Положим

$$u_{v,N}(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle N_v(t_n) \rangle}{\text{mes}(D_v)N},$$

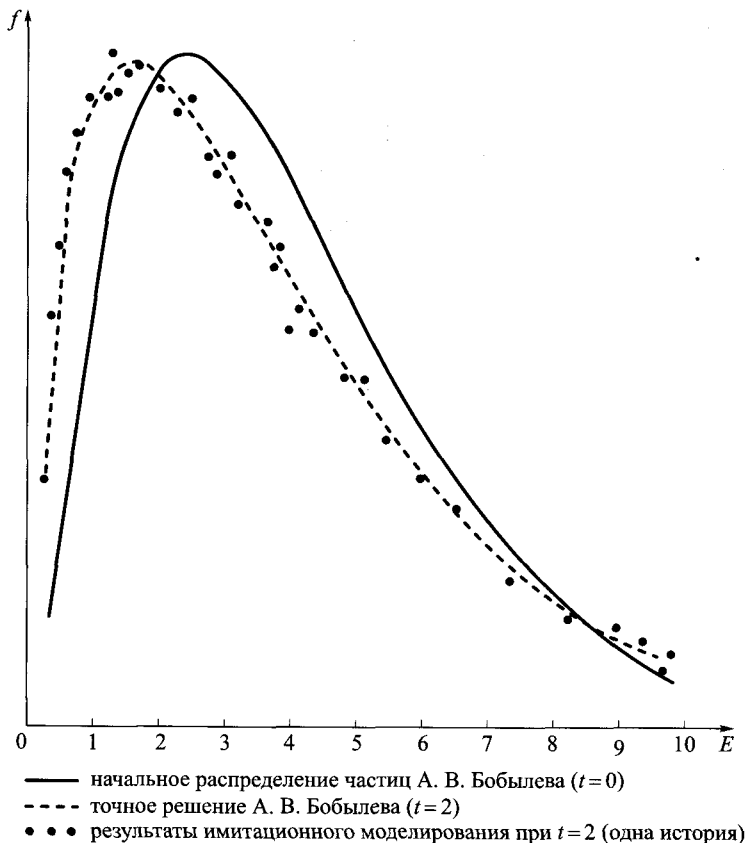
— это средняя концентрация частиц в ячейке  $D_v$  в момент времени  $t_n$  (средняя относительная доля частиц системы из  $N$  частиц, имеющих скорость  $v$  в момент времени  $t_n$ ). Среднее значение относится к независимым реализациям описанного алгоритма.

Тестирование этого алгоритма проводилось посредством сравнения концентраций  $u_{v,N}(t_n)$  с точными решениями А. В. Бобылева [13, 14] пространственно однородного уравнения Больцмана (1.13).

На рис. 1.6 приведены результаты моделирования распределения частиц  $f(E, t)$  по кинетическим энергиям  $E$ , вычисленные на основе приведенного алгоритма, и точное решение А. В. Бобылева (распределение частиц по энергиям для полного времени расчета  $t = 2$ ).

Параметры модели выбирались следующими: число частиц  $N$ , которые в начальный момент времени имеют распределение вероятностей, соответствующее точному решению А. В. Бобылева (одночастичная функция распределения зависит только от кинетической энергии частиц), равно 25 000. Фазовое пространство скоростей трехмерное. Промежуток времени выбора сталкивающихся пар частиц (шаг по времени) равен  $\tau = 10^{-3}$ . Число повторных испытаний для выбора сталкивающихся пар на одном шаге по времени  $Q(N) = 32\,000$ .





**Рис. 1.6.** Тестирование имитационной модели на решении А. В. Бобылева

Интенсивность столкновений в вычислительном эксперименте выбираем так, что  $\Phi = 20$ , если кинетическая энергия  $E$  каждой из сталкивающихся частиц не превосходит  $10^6$ . В противном случае полагаем величину  $\Phi = 0$ . Ячейки имеют вид сферических слоев в пространстве  $\mathbb{R}_3$  с центром в точке  $0$ , при этом толщина каждого слоя равна  $10^{-2}$ .

Результаты вычислительного эксперимента указывают на адекватность имитационного моделирования решению А. В. Бобылева.

Аналогичные вычислительные эксперименты выполнены для пространственно неоднородной модели, где также получены удовлетворительные результаты. Следует подчеркнуть, что в отличие от пространственно однородной модели в простран-

ственно неоднородном случае функция  $\Phi$  является вероятностью столкновения пары частиц в выбранной пространственной ячейке. Поэтому в формулах (1.18) в пространственно неоднородном случае вероятность взаимодействия пары частиц  $\Phi(v^i, v^j)\tau \leq 1$  заменяется на вероятность  $\Phi(v^i, v^j)$ , где

$$0 \leq \Phi(v^i, v^j) = \Phi(v^j, v^i) \leq 1.$$

Предполагается, что частицы взаимодействуют, когда их пространственные координаты различаются не более чем на заданный размер пространственной ячейки  $h > 0$ . При этих изменениях во всей моделируемой системе в течение времени взаимодействия  $\tau$  разыгрывается приведенный выше алгоритм столкновений для пространственно однородной модели. Далее частицы сдвигаются в координатном пространстве на расстояние, равное произведению скорости частицы на шаг по времени  $\tau$ .

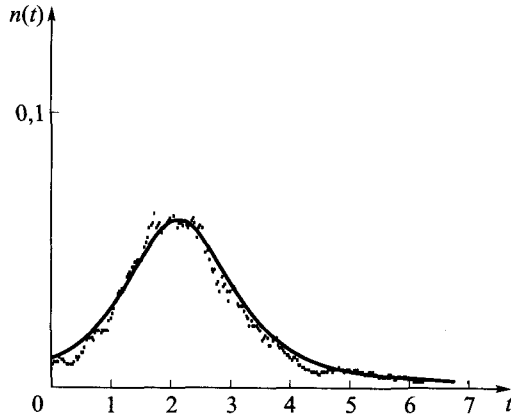
Приближение решения пространственно неоднородного уравнения Больцмана определяется формулой

$$u_{v,N}(x, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle N_v(t_n, D_x^h) \rangle}{\text{mes}(D_v) \text{mes}(D_x^h) N},$$

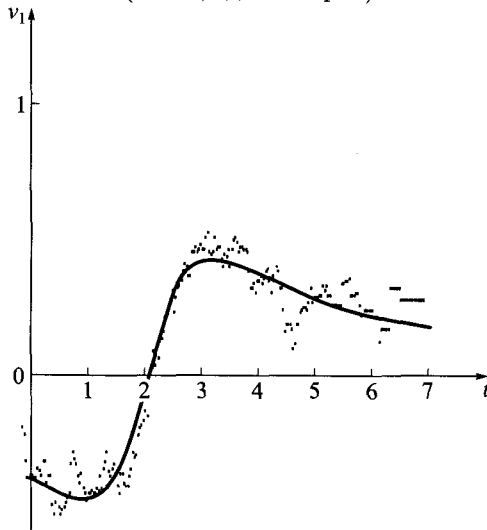
где  $D_x^h$  — шар радиуса  $h$  с центром в точке  $x$  в пространстве положений частиц  $\mathbb{R}_3$ ,  $\text{mes}(D_x^h)$  — объем этого шара,  $N_v(t_n, D_x^h)$  — количество частиц системы, находящихся в момент времени  $t_n$  в шаре  $D_x^h$  со скоростями в ячейке  $D_v$ .

Сравнительный анализ проводился для макроскопических параметров газа, получаемых на основе точного решения пространственно неоднородного уравнения Больцмана и результатов имитационного моделирования. Для приведенных расчетов вероятность столкновения выбранных пар полагалась равной  $\Phi = 1$ , если кинетическая энергия  $E$  каждой из сталкивающихся частиц не превосходила  $10^6$ . В противном случае величина  $\Phi$  полагалась равной 0. Пространственная точка наблюдения выбиралась с координатами  $(-1, 0, 0.5) \in \mathbb{R}_3$ . Полное время расчета  $t = 7.5$ . Число частиц в системе 32 000. На каждом шаге по времени в каждой пространственной ячейке  $Q(N) = 32\,000$  раз подряд выбираются пары сталкивающихся частиц. При этом запрещаются повторные столкновения для номеров, уже единожды участвовавших в розыгрыше столкновения на данном шаге по времени. В расчетах размер пространственной ячейки  $h$  полагался равным 0.3, а шаг по времени

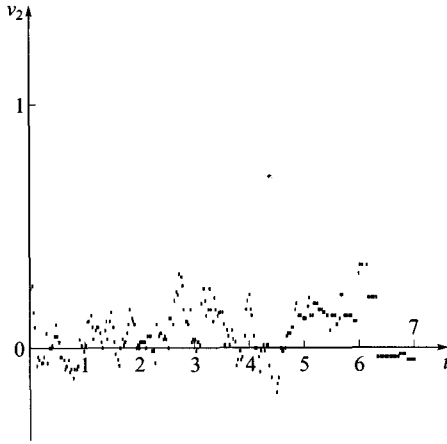
$$\tau = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 h^6.$$



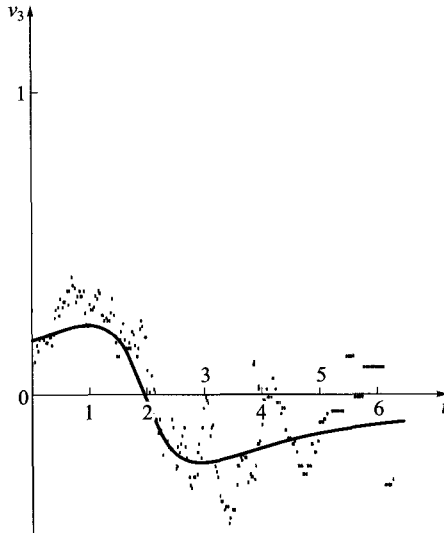
**Рис. 1.7.** График зависимости плотности газа от времени в точке наблюдения с пространственными координатами  $(-1, 0, 0.5)$ . Точное решение (непрерывный график) и результаты имитационного моделирования (точки, одна история)



**Рис. 1.8.** График зависимости первой координаты гидродинамической скорости газа от времени в точке наблюдения с пространственными координатами  $(-1, 0, 0.5)$ . Точное решение (непрерывный график) и результаты имитационного моделирования (точки, одна история)



**Рис. 1.9.** График зависимости второй координаты гидродинамической скорости газа от времени в точке наблюдения с пространственными координатами  $(-1, 0, 0.5)$ . Точное решение (прямая  $v_2 = 0$ ) и результаты имитационного моделирования (точки, одна история)



**Рис. 1.10.** График зависимости гидродинамической третьей координаты скорости газа от времени в точке наблюдения с пространственными координатами  $(-1, 0, 0.5)$ . Точное решение (непрерывный график) и результаты имитационного моделирования (точки, одна история)

В течение всего времени проведения вычислительного эксперимента контролировалось выполнение закона сохранения полной энергии системы и ее полного импульса.

Формулы для аналитических значений макроскопических параметров газа на приведенных графиках (рис. 1.7–1.10, непрерывные линии) имеют следующий вид:

— для концентрации газа

$$n(x, t) = \left( \frac{(2\pi)^{-1}}{1 + (t - 2)^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{0.5x^2}{1 + (t - 2)^2} \right);$$

— для гидродинамической скорости

$$\bar{v}(x, t) = \frac{t - 2}{1 + (t - 2)^2} x;$$

где точка наблюдения  $x = (-1, 0, 0.5)$ .

При заданных пространственно-временных шагах с ростом числа частиц  $N$  результаты вычислительного эксперимента стабилизируются к аналитическим зависимостям параметров газа.

## **§ 8. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ, ЗАДАЧА СТЕФАНА И ВЫРАЩИВАНИЕ КРИСТАЛЛОВ**

Успех в получении высококачественных полупроводниковых кристаллов, выращиваемых в космосе в специальных бортовых технологических установках, во многом зависит от наличия информации о параметрах процесса: положении, форме и динамике фронта кристаллизации в каждый момент времени. Так, например, при выращивании высококачественных монокристаллов из расплава необходимо выполнить ряд условий, одними из которых являются ограничения на градиенты температур и форму фазового фронта в кристалле. Контроль поля температур в реальной установке и ампуле с германием — непростая задача из-за трудностей установки термодатчиков в германии и невозможности напрямую измерить параметры кристаллизации в ходе технологического процесса. Кроме того, для экспериментов по выращиванию кристаллов в космосе, в условиях микрогравитации, невозможно провести предварительные наземные испытания для оптимизации параметров ростовой установки. Поэтому чрезвычайно актуальным в этой ситуации оказывается математическое моделирование, позволяющее определять и прогнозировать параметры процесса кристаллизации.

Одной из проблем, с которыми связано создание и эксплуатация реакторных установок с тяжелым жидкометаллическим теплоносителем (ТЖМТ) свинец—висмут или свинец, является проблема замораживания—размораживания в первом контуре.

При замораживании, нагреве и охлаждении ТЖМТ в твердом состоянии конструкции могут претерпевать значительные механические воздействия, обусловленные несогласованностью перемещений объемов теплоносителя с перемещениями конструкций и соизмеримостью механических свойств теплоносителя в твердом состоянии со свойствами конструкционных материалов.

С целью максимального исключения подобных ситуаций в установках предусматривалось постоянное поддержание контура в «горячем» состоянии, как теплом реакции деления, так и с помощью системы внешнего обогрева. Однако даже это не исключало вероятность замораживания контура в некоторых ситуациях.

В связи с этим практически с первых шагов проектирования установок проводились работы по обоснованию режимов замораживания—размораживания. Решение проблемы в основном шло по пути прямой экспериментальной отработки режимов на моделях, макетах, элементах оборудования и агрегатах в целом и изучения характеристик сплава.

Большим стимулом к дальнейшему решению проблемы замораживания—размораживания явились разработки установок новых поколений, для которых ставилась задача снять многие ограничения, связанные с режимами кристаллизации.

Очевидно, что большую помощь на этом пути также может оказать математическое моделирование таких процессов.

## § 9. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Пусть требуется найти  $U^1(x, t)$ ,  $U^2(x, t)$  — температуры в различных фазах вещества и поверхность  $S_T$  — фронт раздела фаз. Поверхность  $S_T$  является простой незамкнутой гладкой поверхностью. В качестве области определения независимых переменных  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и  $t$  берется область  $\Omega \times [0, T]$ , причем величины  $U^1(x, t)$ ,  $U^2(x, t)$  и  $S_T$  должны быть найдены из условий:

$$\alpha(U^n)U_t^n - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k(U^n) \frac{\partial}{\partial x_i} U^n \right) = 0, \quad (1.19)$$

$$n = 1, 2, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\alpha(U)$ ,  $k(U)$  — коэффициенты, зависящие от свойств кристаллизующегося вещества. Здесь следует заметить, что данные коэффици-

енты не являются гладкими в общем случае и могут иметь разрывы первого рода.

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad U|_{\partial D} = 0. \quad (1.20)$$

$$[U]|_{S_T} = 0. \quad (1.21)$$

Условие (1.21) обозначает равенство температур  $U^1(x, t)$  и  $U^2(x, t)$  на линии фронта кристаллизации. Знак  $[ ]$  обозначает скачок ( $[U] = U^1 - U^2$ ). Кроме того, на границе раздела фаз выполнено условие Стефана

$$\lambda \rho \frac{\partial x_i}{\partial t} = k_1 \left. \frac{\partial U^1}{\partial x_i} \right|_{S_T} - k_2 \left. \frac{\partial U^2}{\partial x_i} \right|_{S_T} = [kU_{x_i}]|_{S_T}, \quad (1.22)$$

где  $\rho$  — плотность вещества;  $\lambda$  — скрытая теплота кристаллизации;  $k_1, k_2$  — коэффициенты теплопроводности в разных фазах вещества.

Условие (1.22) является следствием закона сохранения энергии. Оно аналогично условию Гюгонио для уравнений газовой динамики [141]. Функции  $U, k, c, \rho$  терпят разрыв на линии  $x = \xi(t)$ . Запишем интегральный закон сохранения энергии для контура  $AA'BB'$  на фазовой плоскости  $x, t$  (см. рис. 1.11), считая, что линии  $AB$  и  $B'A$  бесконечно близко примыкают к линии разрыва  $x = \xi(t)$  соответственно справа и слева от нее.

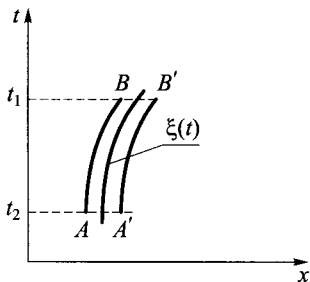


Рис. 1.11. Контур  $AA'BB'$  на фазовой плоскости  $x, t$

$$\oint_{AA'BB'} k \frac{\partial U}{\partial x} dt - c \rho U dx = 0.$$

Вдоль линии  $x = \xi(t)$  имеем  $dx = D dt$ , где  $D = \xi'(t)$ . Поэтому подынтегральное выражение равняется нулю, и, соответственно, получаем

$$D[c\rho U] = \left[ k \frac{\partial U}{\partial x} \right].$$

Если  $\rho = \text{const}$ , то получаем классический закон Стефана, так как  $[c] = U_{\text{пл}} = \lambda$ , где  $U_{\text{пл}}$  — температура плавления.

Задаче Стефана посвящена обширная литература, например [18, 20, 21, 115, 147]. Однако вопрос о существовании классического решения задачи Стефана для многомерного случая остается нерешенным до настоящего времени. Причинами этого, как уже

отмечалось выше, являются нелинейность задачи и отсутствие непрерывности коэффициентов  $\alpha(U)$ ,  $k(U)$  на границе раздела фаз. Для численного решения задач такого типа очень эффективным оказывается введение понятия функционального решения.

Перепишем уравнение (1.19) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\alpha}(U) - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{k}(U) \right) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.23)$$

Здесь вместо функций  $U^1(x, t)$ ,  $U^2(x, t)$  используем  $U(x, t)$ .

Тем самым, уравнение (1.19) рассматривается в форме закона сохранения (1.23), к которому применимы методы теории функциональных решений.

В работах [118, 147] построены разностные методы решения задачи (1.19)–(1.22), которые, однако, обладают рядом недостатков. Во-первых, для расчета по таким методам многомерных задач требуются очень большие аппаратные ресурсы и много времени. Во-вторых, такие методы либо позволяют рассчитывать некоторые интегральные характеристики процесса, например потенциал теплового поля, либо используют какое-то сглаживание разрывных коэффициентов уравнений. Поэтому они не позволяют вычислить с достаточной точностью положение фронта кристаллизации, что совершенно необходимо с практической точки зрения.

Предлагаемое в гл. 2 расширение понятия решения (функциональное решение) позволяет обосновать сходимость приближенных методов при наличии равномерной по параметру априорной оценки аппроксимаций в пространствах  $L_p^{\text{loc}}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .



## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

### § 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРОСТРАНСТВА И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определения и утверждения из общей топологии, используемые в данной главе, приведены в Дополнении (гл. 10), а основные положения теории функциональных решений соответствуют [52].

Пусть  $\Omega$  — локально компактное сепарабельное метрическое пространство, являющееся  $\sigma$ -конечным относительно плотной борелевой меры  $\mu$ , конечной на компактах, строго положительной на открытых множествах в  $\Omega$ . (Борелева мера называется *плотной*, если

$$\mu(E) = \sup_{E \supset K \in K} \mu(K),$$

где  $K$  — класс компактных подмножеств из пространства  $\Omega$ .) Обозначим символами  $d_x$  и  $d_t$  лебеговы меры на пространствах

$$\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\} \quad \text{и} \quad \mathbb{R}_1 = \{t\}$$

соответственно;  $\overset{\circ}{B}$  — множество финитных ограниченных борелевых функций на топологическом произведении

$$Q = \Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1; \quad Q_0 = \Omega \times \mathbb{R}_n;$$

$\overset{\circ}{B}^\infty$  — бесконечно дифференцируемые по переменным

$$(x, t) \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1$$

функции из пространства  $\overset{\circ}{B}$ , производные которых лежат в  $\overset{\circ}{B}$ ;  $L_1^{\text{loc}}(A, \nu)$  — множество борелевых функций на множестве  $A$ , локально суммируемых по борелевой мере  $\nu$ . Пусть на множестве

$$D \subset L_1^{\text{loc}}(\Omega, \nu)$$

определены отображения

$$f_j: D \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+ \rightarrow L_1^{\text{loc}}(\Omega, \nu), \quad 0 \leq j \leq n,$$

где  $\nu = \mu \otimes d_x \otimes d_t$ . На множестве борелевых локально суммируемых по мере  $\nu$  функций

$$M = \left\{ u \in L_1^{\text{loc}}(Q, \nu) : u|_{(x,t) \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \in D, \right. \\ \left. (f_j \circ u) \in L_1^{\text{loc}}(Q, \nu), 0 \leq j \leq n+1 \right\}$$

рассматривается система интегральных уравнений относительно неизвестной переменной  $u \in M$

$$\int_Q [(f_0 \circ u) \partial_t g + \sum_{j=1}^n (f_j \circ u) \partial_{x_j} g + (f_{n+1} \circ u) g] \nu(dQ) + \\ + \int_{Q_0} g|_{t=0} (f_0 \circ u_0)|_{t=0} \nu_0(dQ_0) = 0, \quad \forall g \in \mathring{B}^\infty, \tag{2.1}$$

где мера  $\nu_0 = \mu \otimes d_x$ ,  $u_0$  — заданная функция из множества  $L_1^{\text{loc}}(Q_0, \nu_0)$  такая, что суперпозиция  $(f_0 \circ u_0)|_{t=0}$  принадлежит множеству  $L_1^{\text{loc}}(Q_0, \nu_0)$ . Система соотношений (2.1) служит для определения обобщенного решения  $u \in M$  задачи Коши

$$J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_0^{(\omega)}(u, x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j^{(\omega)}(u, x, t)}{\partial x_j} - f_{n+1}^{(\omega)}(u, x, t) = 0, \tag{2.2}$$

$$\omega \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \omega \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}_n. \tag{2.3}$$

Наиболее содержательное описание класса корректности для этой задачи получено в [96, 97, 99], когда  $\text{card } \Omega = 1$ . Для случая  $\text{card } \Omega > 1$  понятие обобщенного решения, определяемого системой соотношений (2.1), является стесняющим с точки зрения обоснования корректности задачи и вычислительных методов. Предлагаемое ниже расширение понятия решения (функциональные решения) позволяет обосновать сходимость приближенных методов при наличии равномерной по параметру априорной оценки аппроксимаций в пространствах  $L_p^{\text{loc}}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Обозначим  $\mathcal{E}$  векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций

$$F_{g, g_1} = \sum_{j=0}^n f_j \partial_{x_j} g + f_{n+1} g + u g_1, \quad u \in D, \\ x_0 \stackrel{\text{def}}{=} t,$$

с произвольными функциями  $g \in \mathring{B}^\infty$ ,  $g_1 \in \mathring{B}$ . Для каждого вектора  $F \in \mathcal{E}$  определим операторы  $\pi$ ,  $\pi_0$ ,  $\pi_1$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\pi(F) &\stackrel{\text{def}}{=} F_{g,0}, \\ \pi_1(F) &\stackrel{\text{def}}{=} g|_{t=0}f_0|_{t=0} + g_1|_{t=0}u, \\ \pi_0(F) &= \pi_1(F_{g,0}).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Пусть  $\mathcal{E}^+ = \{l\}$  — пространство, алгебраически сопряженное к  $\mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}^+$  по определению состоит из конечных линейных функционалов на линейном пространстве  $\mathcal{E}$ ). На  $\mathcal{E}^+$  зададим топологию  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  посредством системы полунорм  $\{p_F\}_{F \in \mathcal{E}}$ , где

$$p_F(l) = |l(F)| \quad \forall l \in \mathcal{E}^+, \quad F \in \mathcal{E}.$$

Топологическое пространство  $\mathcal{E}^+$ ,  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  локально выпуклое, хаусдорфово. В указанной топологии каждое отображение  $l \mapsto l(F)$ ,  $l \in \mathcal{E}^+$ , непрерывное (здесь переменными являются  $l$ , а произвольные значения  $F \in \mathcal{E}$  фиксированы). Это следует из определения этой топологии, см. дополнение, § 6.

Ниже существенно используется критерий из теоремы 10.5 для относительной компактности множеств в построенном таким образом топологическом пространстве  $\mathcal{E}^+$ ,  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ :

$$\sup_{l \in G} p_F(l) < \infty,\tag{2.5}$$

для каждого элемента  $F \in \mathcal{E}$ .

Рассмотрим вложение множества  $M$  в пространство  $\mathcal{E}^+$ , которое определим формулой

$$\forall u \in M: u \mapsto l_u \in \mathcal{E}^+, \quad l_u(F) \stackrel{\text{def}}{=} \int_Q (F \circ u)\nu(dQ), \quad F \in \mathcal{E}.\tag{2.6}$$

Следует отметить, что интеграл в правой части этой формулы для функций  $u \in M$  конечный, так как в силу финитности пробных функций  $g$  и  $g_1$ , входящих в  $F$ , интегрирование распространяется лишь по компактному носителю этих функций. Таким образом, интегралы от слагаемых, которые составляют подынтегральное выражение в (2.6), конечны из-за их локальной суммируемости, обусловленной требованиями на класс  $M$  и ограниченностью пробных функций  $g, g_1$ . Итак, каждый функционал  $l_u$ , задаваемый формулой (2.6), принадлежит пространству  $\mathcal{E}^+$ .

**Лемма 2.1.** Вложение (2.6) мономорфно на классах эквивалентности функций из класса  $M$ , совпадающих почти везде на множестве  $Q$  относительно меры  $\nu$ .

□ Предположим, что борелевы функции  $u_1$  и  $u_2$  не совпадают на множестве  $E$ , имеющем положительную меру  $\nu(E)$ . В силу плотности меры  $\mu$  и мер  $d_x, d_t$ , произведение  $\nu = \mu \otimes d_x \otimes d_t$  также является плотным, а значит, существует компактное множество  $K \subset E$  положительной меры  $\nu(K) > 0$ . Положим  $\varphi = \text{sgn}(u_1 - u_2)$ . Тогда справедливо соотношение

$$\int_Q u_1 \varphi \chi_K \nu(dQ) \neq \int_Q u_2 \varphi \chi_K \nu(dQ),$$

где  $\chi_K$  — характеристическая функция множества  $K$ . Поскольку  $\varphi, \chi_K \in \overset{\circ}{B}$ , то на векторе  $F_{0, g_1}, g_1 = \varphi \chi_K$  функционалы  $l_{u_1}$  и  $l_{u_2}$  не совпадают, так как

$$(l_{u_1} - l_{u_2})(F_{0, g_1}) = \int_K |u_1 - u_2| \nu(dK) > 0,$$

следовательно, функции  $u_1$  и  $u_2$  могут не совпадать лишь на множестве меры нуль. Лемма доказана. ■

Обозначим  $[M]$  замыкание образа вложения (2.6) множества  $M$  в пространство  $\{\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$ . На множестве  $[M]$  рассмотрим индуцированную тихоновскую топологию  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  (в которой открытыми множествами служат пересечения элементов системы  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  с множеством  $[M]$ ).

Аналогичным способом вложим множество начальных данных  $M_0$ , состоящее из функций  $u_0$ , которые вместе с суперпозициями  $(f_0 \circ u_0)|_{t=0}$  принадлежат пространству  $L_1^{\text{loc}}(Q_0, \nu_0)$ , в пространство  $\mathcal{E}_0^+$ , являющееся алгебраически сопряженным к векторному пространству

$$\mathcal{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(\mathcal{E}).$$

При этом считаем, что на пространстве  $\mathcal{E}_0^+$  введена топология  $\sigma(\mathcal{E}_0^+, \mathcal{E}_0)$ , задаваемая множеством полунорм  $\{p_F^{(0)}\}_{F \in \mathcal{E}}$ , где

$$p_F^{(0)} = |l^{(0)}(\pi_1(F))|, \quad l^{(0)} \in \mathcal{E}_0^+.$$

Соответствующее вложение множества  $M_0$  в  $\mathcal{E}_0^+$  осуществляется отображением

$$\begin{aligned} \forall u_0 \in M_0: u_0 &\mapsto l_{u_0}^{(0)} \in \mathcal{E}_0^+, \\ l_u^{(0)}(F) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{Q_0} (\pi_1(F) \circ u_0) \nu_0(dQ_0), \quad F \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Свойство его мономорфности формулируется и доказывается так же, как в лемме 2.1. На образе этого вложения множества  $M_0$  в пространстве  $\mathcal{E}_0^+$  введена топология  $\sigma(\mathcal{E}_0^+, \mathcal{E}_0)$ .

Если функция  $u \in M$  является решением задачи (2.1) (т. е. обобщенным решением задачи Коши (2.2), (2.3)), то равенства (2.1) эквивалентны соотношениям

$$l_u(\pi(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0, \quad \forall F \in \mathcal{E}. \quad (2.7)$$

**Определение 2.1.** Элемент  $l \in [M]$  назовем *функциональным решением* уравнения (2.2) с начальным условием  $u_0 \in M_0$ , если для каждого элемента  $F \in \mathcal{E}$  справедливо равенство

$$l(\pi(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (2.8)$$

Назовем классом однозначной разрешимости задачи (2.1), (2.2) такое подмножество  $US \subset [M] \subset \mathcal{E}^+$ , что каждому начальному данному  $u_0 \in M_0$  соответствует только одно функциональное решение этой задачи, принадлежащее подмножеству  $US$ .

В дальнейшем вместо соотношений (2.1)–(2.3), (2.7) рассматривается задача (2.8) относительно неизвестной  $l \in [M]$ .

Будем говорить, что задан приближенный метод решения задачи (2.8), обозначаемый  $\mathcal{AM}$ , если указан выбор параметрического семейства элементов во множестве  $M$ :

$$\alpha \mapsto u_\alpha \in M, \quad \alpha \in A,$$

где  $A$  — множество параметров приближенного метода, например, шаги разностной схемы, параметры вязкости и т. п. Приближенный метод  $\mathcal{AM}$  назовем регулярным, если выбор обобщенной последовательности  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  сделан на основе решения семейства уравнений, заменяющих (2.2),

$$J_\alpha(u_\alpha) = 0, \quad \alpha \in A,$$

и область определения совокупности операторов  $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$  содержит множество  $V \subset M$ , плотное в топологии  $L_1^{\text{loc}}$  во множестве определения  $U(V \subset U \subset M)$  оператора  $J$  из уравнения (2.2). Предполагается, что для каждого элемента  $v \in V$  справедливо соотношение

$$\lim_{\alpha} J_\alpha(v) = J(v)$$

всюду на  $Q$ , где предел рассматривается на направленном множестве  $A$  параметров метода  $\mathcal{AM}$ .

Ниже вместо термина «регулярный метод» иногда будем пользоваться термином «метод» (там, где это не вызовет недоразумений).

**Определение 2.2.** Функциональное решение  $l \in [M]$  назовем *регулярным*, если оно является пределом последовательности аппроксимаций, задаваемых регулярным методом.

**Определение 2.3.** Регулярный метод  $\mathcal{A}M$  *слабо аппроксимирует* задачу (2.8), если можно указать заданную этим методом обобщенную последовательность приближений  $u_\alpha \in M$ , для которой значения невязки

$$\delta_\alpha(F) \stackrel{\text{def}}{=} |l_{u_\alpha}(\pi(F)) + l_{u_\alpha|_{t=0}}^{(0)}(\pi_0(F))| + |(l_{u_0}^{(0)} - l_{u_\alpha|_{t=0}}^{(0)})(\pi_0(F))|$$

стремятся к нулю при каждом  $F \in \mathcal{E}$  на направленности параметров  $A$ . Назовем регулярный приближенный метод  $\mathcal{A}M$  *равномерно слабо аппроксимирующим* задачу (2.8), если невязка стремится к нулю при всех значениях  $u_0 \in M_0$  на общей для этой совокупности направленности параметров  $A$ .

**Определение 2.4.** Метод  $\mathcal{A}M$  *сходится*, если он определяет сходящуюся в пространстве  $[M]$ ,  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  обобщенную подпоследовательность  $\{l_{u_{\alpha_n}}\}$ , пределом которой является функциональное решение задачи (2.8).

**Определение 2.5.** Назовем метод  $\mathcal{A}M$  *слабо устойчивым*, если

$$\sup_{\alpha \in A} \left| \int_Q g u_\alpha \nu(dQ) \right| < \infty, \quad g \in \overset{\circ}{B}. \quad (2.9)$$

Метод назовем *равномерно слабо устойчивым*, если соотношение (2.9) имеет место сразу для всех начальных данных  $u_0 \in M_0$  на общей для этой совокупности направленности параметров  $A$ .

**Замечание 2.1.** В силу теоремы Банаха—Штейнгауза (теорема 10.13), условие устойчивости (2.9) эквивалентно следующей равномерной оценке приближений  $u_\alpha$  в пространстве  $L_1^{\text{loc}}(Q, \nu)$ :

$$\sup_{\alpha \in A} \int_K |u_\alpha| \nu(dQ) < \infty,$$

выполняющейся на каждом компакте  $K \subset Q$ .

□ Действительно, условие устойчивости (2.9) на пробных функциях  $g$  с фиксированным носителем, сосредоточенным на компакте  $K$ , означает слабую ограниченность семейства  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , что эквивалентно его ограниченности. Утверждение доказано. ■

**Лемма 2.2.** Для методов, основанных на решении однородных линейных разностных схем, необходимым условием выполнения неравенства (2.9) является спектральный признак устойчивости Неймана, приводящий к условиям Куранта, Фридрихса, Леви [70].

□ Рассмотрим решение разностной схемы в виде

$$u_\alpha(x, t) = \lambda^{[t/\tau]}(\alpha)v_h(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}_n, \\ \alpha = (\tau, h), \quad \|v_h\|_\infty = 1.$$

Условие устойчивости разностного метода с учетом замечания 2.1 приводит к оценке

$$\sup_\alpha \int_0^T |\lambda(\alpha)|^{[t/\tau]} dt < \infty,$$

выполняющейся на каждом отрезке времени  $0 \leq t \leq T$ . Таким образом,

$$\sup_{0 < \tau < \tau_0} \tau \sum_{j=0}^{[T/\tau]} |\lambda|^j = c < \infty. \quad (2.10)$$

Убедимся, что точки спектра  $\lambda(\alpha)$  оператора перехода разностной схемы необходимо удовлетворяют неравенству

$$|\lambda| \leq 1 + c_1\tau$$

при  $0 < \tau < \tau_0$  и постоянной  $c_1$ , не зависящей от  $\tau_0$ . Действительно, предположим, что последняя оценка не имеет места, т. е. существует монотонно убывающая последовательность значений  $\tau_m \rightarrow 0$  такая, что для соответствующих значений  $\lambda_m$  выполняется неравенство

$$|\lambda_m| \geq 1 + m\tau_m, \quad m \geq m_0,$$

значит,

$$\tau_m \sum_{j=0}^{[T/\tau_m]} |\lambda_m|^j \geq \frac{1}{2}[T/\tau_m](1 + m\tau_m)^{1/2[T/\tau_m]} \geq \\ \geq \frac{1}{2}[T/\tau_m](1 + m_0\tau_m)^{1/2[T/\tau_m]}, \quad m \geq m_0.$$

Но тогда

$$\sup_{0 < \tau < \tau_0} \tau \sum_{j=0}^{[T/\tau]} |\lambda|^j \geq \frac{T}{2} \exp\left(\frac{m_0 T}{2}\right),$$

с произвольным натуральным  $m_0$ , что влечет неограниченность правой части последнего неравенства. Это противоречит условию (2.10). Лемма доказана. ■

## § 2. СХОДИМОСТЬ В ЦЕЛОМ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

Эффективность понятий, введенных в § 1 гл. 2, обусловлена проверяемостью условий их применения в конкретных задачах и возможностью доказательства существования в целом функциональных решений, являющихся предельными точками методов со свойствами слабой аппроксимации и слабой устойчивости, а также обоснованием наличия классов однозначной разрешимости задачи Коши.

**Теорема 2.1.** Пусть регулярный метод  $\mathcal{AM}$  слабо аппроксимирует задачу (2.8) и является слабо устойчивым. Тогда он сходится к функциональному решению задачи (2.8). Если метод является равномерно слабо аппроксимирующим и равномерно слабо устойчивым, то можно указать класс однозначной разрешимости и по нему построить класс корректности задачи (2.8)  $US$  такой, что на некоторой направленности параметров метода аппроксимации сходятся к точкам из  $US$  сразу при всех начальных данных из множества  $M_0$ . При этом класс корректности задачи (2.8) может быть задан произвольным компактом  $K \subset US$  в топологии, индуцированной  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  на  $US$ , при начальных данных, принадлежащим множеству, которое порождает функциональные решения в компакте  $K$ .

□ В силу требования слабой аппроксимации, существует последовательность приближений  $u_\alpha$  по методу  $\mathcal{AM}$ , для которой невязка  $\delta_\alpha(F)$  стремится к нулю на направленности параметров  $A$  данного метода. Так как справедливо представление

$$l_{u_\alpha|_{t=0}}^{(0)}(F) = l_{u_\alpha|_{t=0}}^{(0)}(\pi_0(F_{g,g_1})) + l_{u_\alpha|_{t=0}}^{(0)}(\pi_1(F_{0,g_1})),$$

то на этой последовательности величины

$$\sup_{\alpha \in A} |l_{u_\alpha}(\pi(F))| < \infty$$

при каждом  $F \in \mathcal{E}$ . Сочетая эти неравенства с условием слабой устойчивости метода, заключаем, что

$$\sup_{\alpha \in A} p_F(l_{u_\alpha}) < \infty, \quad F \in \mathcal{E},$$

т. е. выполняется условие теоремы 10.9, совпадающее с (2.5), что обеспечивает относительную компактность множества приближений  $\{l_{u_\alpha}\}_{\alpha \in A}$  в пространстве  $[M]$ ,  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ . Итак, имеется сходящаяся обобщенная подпоследовательность  $\{l^{(\beta)}\} \subset \{l_{u_\alpha}\}$ . Предел этой обобщенной подпоследовательности  $l$  принадлежит множеству  $[M]$ .



Поскольку отображение

$$l \mapsto l(F) \in \mathbb{R}, \quad \forall F \in \mathcal{E},$$

непрерывно на  $[M]$ ,  $\sigma$ , то, переходя к пределу в выражении для невязки с учетом ее стремления к нулю, устанавливаем, что указанный предел  $l \in [M]$  является функциональным решением задачи (2.8).

Перейдем ко второй части утверждения теоремы. Для этого рассмотрим тихоновское произведение топологических пространств  $\{\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$ , взятых  $M_0$  раз ( $M_0$  — совокупность начальных данных), которое обозначим  $\{\mathcal{E}^+, \sigma\}^{M_0}$ . В силу требований равномерной слабой аппроксимации и равномерной слабой устойчивости (в соответствии с доказательством первой части теоремы), аппроксимации при каждом фиксированном начальном условии  $u_0$  находятс в бикompактном подмножестве пространства  $\{\mathcal{E}^+, \sigma\}$ . По теореме А. Н. Тихонова о произведении бикompактов (теорема 10.8), совокупность аппроксимаций при всевозможных начальных данных из совокупности  $M_0$  принадлежит бикompактному подмножеству в  $\{\mathcal{E}^+, \sigma\}^{M_0}$ . (Здесь существенно используется наличие общей для всех начальных данных направленности параметров метода, на которой выполняются условия теоремы 2.1.) Далее выбираем в тихоновском произведении из совокупности аппроксимаций обобщенную сходящуюся подпоследовательность. Поскольку тихоновская топология есть топология поточечной сходимости (где аргументами служат начальные данные  $M_0$ ), то дальше повторяются рассуждения первой части доказательства. Таким образом, для каждого начального условия из совокупности  $M_0$  построено однозначно функциональное решение задачи, являющееся пределом аппроксимаций по некоторой общей для всех начальных данных направленности параметров метода. Очевидно, тем самым построен искомый класс однозначной разрешимости задачи Коши.

Отметим, что по построению начальные данные в задаче (2.8) непрерывно зависят от функционального решения в тихоновской топологии. Таким образом, на каждом компакте в классе однозначной разрешимости  $US$ , снабженном индуцированной тихоновской топологией, имеется непрерывное взаимно однозначное отображение на множество начальных данных. Образ указанного компакта является компактом во множестве начальных данных. Следовательно, применима в этом случае теорема 10.7 о гомеоморфизме, обеспечивающая непрерывность обратного отображения из построенного компакта во множество начальных данных в класс однозначной

разрешимости. Тем самым построен искомый класс корректности. Теорема доказана. ■

**Замечание 2.2.** Регулярное функциональное решение однозначно отождествляется с локально суммируемой функцией  $u \in L_1^{\text{loc}}$ .

□ Действительно, регулярное функциональное решение является пределом последовательности элементов множества  $M$  в топологии  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  при вложении (2.6), задаваемой по определению 2.1 регулярным методом. Значит, существует последовательность  $u_n \in M$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , для которой

$$l_{u_n} \rightarrow l, \quad n \rightarrow \infty.$$

Но в силу определения функционального решения  $l$  справедливо равенство

$$l(F_{g, g_1}) = l(g_1 u) - l_{u_0}^{(0)}(f_0|_{t=0}|_{t=0}), \\ g \in \mathring{B}^\infty, \quad g_1 \in \mathring{B}.$$

Так как пространство  $L_1^{\text{loc}}$  слабо полно [183], то существует элемент  $u \in L_1^{\text{loc}}$  такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q g_1 u_n \nu(dQ) = \int_Q g_1 u \nu(dQ),$$

и, следовательно,

$$l(F_{0, g_1}) = \int_Q g_1 u \nu(dQ), \quad g_1 \in \mathring{B}, \tag{2.11}$$

$$l(F_{g, g_1}) = l(F_{0, g_1}) - l_0^{(0)}(\pi_0(F_{g, g_1})), \quad g \in \mathring{B}^\infty, \quad g_1 \in \mathring{B}.$$

Посредством этих соотношений регулярные функциональные решения отождествляются с элементами пространства  $L_1^{\text{loc}}$ . ■

**Замечание 2.3.** Если последовательность  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , задаваемая регулярным методом, слабо сходится в пространстве  $L_1^{\text{loc}}$  к функции  $u$ , и при этом значения невязки  $\delta_n$ , соответствующие этой последовательности, стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то слабый предел  $u$  является регулярным функциональным решением задачи (2.8) в смысле формулы (2.11), приведенной в замечании 2.2.

□ Это утверждение является прямым следствием теоремы 10.13 Банаха—Штейнгауза об ограниченности слабо ограниченных множеств и замечания 2.2. ■

**Замечание 2.4.** Топология  $\{\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$  сильнее топологии слабой сходимости в  $L_1^{\text{loc}}(Q, \nu)$ .

**Замечание 2.5.** Отождествление (2.11) регулярных функциональных решений с функциями позволяет вычислять интегральные средние неизвестной, но в то же время ее нелинейные суперпозиции, вообще говоря, не являются слабыми пределами нелинейных суперпозиций приближений метода, т. е. существуют функциональные решения, которые не являются обобщенными в смысле С. Л. Соболева.

□ Данное утверждение иллюстрируется методом, основанным на решении разностной схемы Эйлера для задачи Коши в случае обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \\ f(u) &= \begin{cases} -1, & u \geq 0, \\ 1 & u < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

■

Приближенный метод Эйлера определим посредством соотношений

$$\begin{aligned} \frac{u_h(t+h) - u_h(t)}{h} &= f(u_h(t)), \quad t \geq 0, \\ u_h(t) &= u_0, \quad 0 \leq t < h, \quad h > 0. \end{aligned}$$

Решение задачи Коши (2.12) в классическом смысле существует лишь до момента попадания его на точку разрыва функции  $f$ . Далее это решение не может быть продолжено как классическое либо обобщенное. Приближение, задаваемое методом Эйлера после момента времени  $t_c$  попадания его на точку разрыва функции  $f$ , вычисляется по следующим формулам:

$$u_h(t) = \begin{cases} 0, & 2nh \leq t < (2n+1)h, \\ -h, & (2n+1)h \leq t, \end{cases} \quad t > t_c.$$

Очевидно, что метод Эйлера является регулярным, он равномерно сходится, его невязка слабо стремится к нулю и, таким образом, функция  $u(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ , в силу замечания 2.3 является регулярным функциональным решением задачи Коши (2.12) с начальным условием  $u(0) = 0$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что это решение удовлетворяет определению А. Ф. Филиппова [169]. При этом последовательность суперпозиций  $(f \circ u_h)$ ,  $h > 0$  слабо сходится к нулю, когда  $h \rightarrow 0$ , но в то же время  $(f \circ u) = 1$ .

Указанный пример служит отражением глубокой связи решений А. Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и регулярных функциональных решений, которую установим ниже.

### § 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОДУ

Следуя [169], воспроизведем некоторые обозначения, определения и формулировки теорем, позволяющие связать функциональные решения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с определением решения А. Ф. Филиппова в [169].

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(t, u), \quad u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) \in \mathbb{R}_n, \\ f &= (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}) \in \mathbb{R}_n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Будем считать, что фазовое пространство  $\mathbb{R}_n$  снабжено евклидовой метрикой, через  $U_u(\delta)$  обозначим замкнутый шар радиуса  $\delta > 0$  с центром в точке  $u \in \mathbb{R}_n$ , выпуклое замыкание множества  $E$  обозначим  $\text{conv}E$ . Положим

$$\begin{aligned} M\{\varphi(u)\} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{vrai} \max_{u' \in U_u(\delta)} \varphi(u'), \\ m\{\varphi(u)\} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{vrai} \min_{u' \in U_u(\delta)} \varphi(u'), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где операции существенного максимума и минимума применяются к скалярной функции  $\varphi$  относительно меры Лебега  $d_u$  на  $\mathbb{R}_n$ .

**Определение 2.6.** Вектор-функция  $u(\cdot)$ , определенная на интервале  $(t_1, t_2)$ , называется  $\Phi$ -решением (решением А. Ф. Филиппова [169]), если она абсолютно непрерывна и если при почти всех  $t \in (t_1, t_2)$  значения

$$\frac{du}{dt} \in \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{d_u(N)=0} \text{conv}f(t, U_{u(t)}(\delta) \setminus N) \stackrel{\text{def}}{=} K\{f, u(t)\}. \quad (2.15)$$

Эквивалентную формулировку понятия  $\Phi$ -решения дает следующее определение.

**Определение 2.7.** Вектор-функция  $u(\cdot)$ , определенная на интервале  $(t_1, t_2)$ , называется  $\Phi$ -решением уравнения (2.13), если она абсолютно непрерывна и если при почти всех  $t \in (t_1, t_2)$  при любом выборе ортогональной системы координат в пространстве  $\mathbb{R}_n$

$$m\{f^{(i)}(t, u(t))\} \leq \frac{du^{(i)}}{dt} \leq M\{f^{(i)}(t, u(t))\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

где  $f^{(i)}$  — правые части системы уравнений (2.13), которая соответствует выбранной ортогональной системе координат.

Равносильность обоих определений  $\Phi$ -решения установлена в [169] на основании следующей леммы.

**Лемма 2.3.** *Для того чтобы абсолютно непрерывная вектор-функция  $u(\cdot)$  являлась  $\Phi$ -решением уравнения (2.13) в смысле определения 2.5, необходимо и достаточно, чтобы почти при всех  $t$  для каждого вектора  $v \in \mathbb{R}_n$  выполнялось неравенство*

$$\left( \frac{du}{dt}, v \right)_{\mathbb{R}_n} \leq M\{(f(t, u(t)), v)_{\mathbb{R}_n}\}. \quad (2.17)$$

Сравнение  $\Phi$ -решений с другими определениями решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (классически, по Каратеодори, Розенталю, Викторовскому и др.) проведено А. Ф. Филипповым [169], см. также [25, 195, 255].

Вопросы предельного перехода в дифференциальном уравнении рассмотрены в теореме 3 работы [169]; мы ниже несколько изменим эту теорему для целей настоящего исследования.

**Теорема 2.2.** *Пусть последовательность абсолютно непрерывных функций  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$  содержится в замкнутой ограниченной области  $D \subset \mathbb{R}_n$  и удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{du_k(t)}{dt} = f_k(t, u_k(\cdot)) + q_k(t, u_k(\cdot)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.18)$$

с измеримыми правыми частями. Пусть операторы

$$f_k(t, \cdot), \quad q_k(t, \cdot), \quad k \in \mathbb{N},$$

определенные на множестве непрерывных функций  $C_{[t_1, t_2]}$ , таковы, что на каждом компактном в топологии пространства  $C_{[t_1, t_2]}$  семействе  $G$  имеют место соотношения

$$\forall \delta > 0 \quad \exists k_0(\delta, G): \forall k \geq k_0, \quad \forall u \in G:$$

$$f_k(t, u(\cdot)) \in \bigcap_{d_u(N)=0} \text{conv} f(t, U_{u(t)}(\delta) \setminus N), \quad (2.19)$$

$$\|q(t)\|_{\mathbb{R}_n} \leq \psi_k(t), \quad \int_{t_1}^{t_2} \psi_k(t) dt \leq \delta, \quad (2.20)$$

и при этом справедливы неравенства

$$\|f\|_{\mathbb{R}_n} \leq \text{const}, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{\mathbb{R}_n} \leq \text{const},$$

где  $f$  — правая часть системы (2.13). Тогда:

- 0) приближения  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  образуют компактное семейство в пространстве  $C_{[t_1, t_2]}$ ;

1) предельная функция  $u$  любой равномерно сходящейся при  $k \rightarrow \infty$  подпоследовательности приближений  $u_k$  есть  $\Phi$ -решение системы (2.13).

□ Свойство компактности семейства  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  очевидно. Пусть последовательность  $u_k$  сходится к  $u$  равномерно на отрезке  $[t_1, t_2]$ . Значит, для заданного положительного числа  $\delta > 0$  существует такое  $k(\delta)$ , что при  $k \geq k(\delta)$  выполняется неравенство

$$\sup_{t_1 \leq t \leq t_2} |u_k(t) - u(t)| < \frac{\delta}{2}.$$

В силу соотношений (2.18) для каждого вектора  $v \in \mathbb{R}_n$  и любых

$$t_1 \leq t' \leq t'' \leq t_2$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned} (u_k(t'') - u_k(t'), v)_{\mathbb{R}_n} &= \int_{t'}^{t''} (f_k(t, u_k(\cdot)), v)_{\mathbb{R}_n} dt + \\ &+ \int_{t'}^{t''} (g_k(t, u_k(\cdot)), v)_{\mathbb{R}_n} dt. \end{aligned}$$

Учитывая близость  $u_k$  и  $u$  при достаточно больших  $k$ , а также условия (2.19), (2.20), получаем неравенство

$$\begin{aligned} (u_k(t'') - u_k(t'), v)_{\mathbb{R}_n} &\leq \int_{t'}^{t''} \text{vrai} \max_{u' \in U_{u(t)}(\delta)} (f(t, u'), v)_{\mathbb{R}_n} dt + \\ &+ \|v\|_{\mathbb{R}_n} \int_{t'}^{t''} \psi_k(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого положительного  $\delta$  можно указать такой номер  $k_0(\delta, v)$ , что при всех  $k \geq k_0$  имеем

$$(u_k(t'') - u_k(t'), v)_{\mathbb{R}_n} \leq \int_{t'}^{t''} M\{(f(t, u(t)), v)_{\mathbb{R}_n}\} dt + \delta.$$

Переходя к пределу  $k \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , получаем неравенство

$$(u(t') - u(t''), v)_{\mathbb{R}_n} \leq \int_{t'}^{t''} M\{(f(t, u(t)), v)_{\mathbb{R}_n}\} dt,$$

которое в силу определения 2.7 означает, что предельная функция  $u$  есть  $\Phi$ -решение системы (2.13). Теорема доказана. ■

На основании этой теоремы ниже устанавливается связь  $\Phi$ -решений и регулярных функциональных решений для приближенных методов, основанных на соотношениях (2.18)–(2.20).

**Теорема 2.3.** Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и для последовательности приближений  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , задаваемой регулярным приближенным методом (2.18), в случае построения решения задачи Коши для системы (2.13) имеет место слабая аппроксимация, причем на последовательности  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  значения невязки стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$  в смысле определения 2.2. Тогда каждая предельная точка последовательности  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  в пространстве  $C_{[0,T]}$  одновременно является  $\Phi$ -решением и регулярным функциональным решением задачи Коши для системы (2.13).

□ То, что предельные точки последовательности  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  принадлежат множеству  $\Phi$ -решений, составляет содержание предыдущей теоремы. Принадлежность предельных точек последовательности  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  классу регулярных функциональных решений обусловлена замечанием 2.3 к теореме 2.1. Теорема доказана. ■

**Замечание 2.6.** Разностный метод Эйлера, основанный на кусочно постоянных и кусочно линейных аппроксимациях неизвестной, в случае ограниченной измеримой функции  $f$  в правой части системы (2.13) является регулярным сходящимся методом.

Очевидно, что на каждом конечном промежутке изменения аргумента приближения, определяемые обеими формами метода Эйлера, равномерно близки в метрике пространства  $L_1$  относительно шага сетки. Поэтому предельные точки равномерно сходящихся приближений этих методов совпадают. Отметим, что метод ломаных Эйлера равномерно сходится к  $\Phi$ -решению системы (2.13), что устанавливается непосредственным применением теоремы 2.2. Что касается кусочно постоянных аппроксимаций по методу Эйлера, то этот регулярный метод обладает слабой аппроксимацией, причем невязка метода подчиняется оценке

$$\delta_\tau = O(\tau), \quad \tau > 0.$$

Таким образом, каждая равномерно сходящаяся последовательность кусочно постоянных приближений метода Эйлера сходится к регулярному функциональному решению задачи Коши для системы (2.13). Но в силу вышеприведенного замечания о совпадении

пределных точек обеих форм метода заключаем, что в рассматриваемом случае  $\Phi$ -решения системы совпадают с регулярными функциональными решениями, получаемыми по методу Эйлера. Более того, такой же результат справедлив и для метода усреднения.

**§ 4. МЕТОД ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ**

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u^{(i)}(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j^{(i)}(u, x, t)}{\partial x_j} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{2.21}$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Для ее приближенного решения используется метод исчезающей вязкости, основанный на решении следующих аппроксимирующих задач:

$$\frac{\partial u^{(i)}(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j^{(i)}(u, x, t)}{\partial x_j} = \alpha_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_j^2}, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{2.22}$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_i \geq 0.$$

**Теорема 2.4.** Пусть при каждом  $\alpha = \{\alpha_i\}_1^m$  задача (2.22) имеет гладкое решение, которое удовлетворяет требованию равномерной локальной суммируемости

$$\sup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 0 \leq \alpha_i \leq \alpha_0 K}} \int \|u_\alpha\|_{\mathbb{R}_m} dx \otimes dt < \infty, \tag{2.23}$$

на каждом компакте

$$K \subset \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+.$$

Тогда для некоторой обобщенной подпоследовательности  $\alpha^{(k)} \rightarrow 0$  приближения  $u_{\alpha^{(k)}}$  сходятся к функциональному решению задачи Коши (2.21).

□ Условие (2.23) означает слабую устойчивость метода исчезающей вязкости. Величина невязки метода оценивается выражением

$$\delta \leq \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i \int_{\mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_1^+} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \right| \|u_\alpha\|_{\mathbb{R}_m} dx \otimes dt = O(\alpha).$$

Применяя теорему 2.1, получаем искомое утверждение. ■



**Замечание 2.7.** Простейший пример получения такого рода оценок связан с градиентной системой, где

$$f_j^{(i)}(u) = \frac{\partial F_j(u)}{\partial u^{(i)}},$$

$$u \in \mathbb{R}_m, \quad F_j \in C^2(\mathbb{R}_m, \mathbb{R}_1), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

а начальная функция  $u_0$  принадлежит пространству  $L_2^{(m)}(\mathbb{R}_n)$  [42, 43]. В этом случае сходимость метода исчезающей вязкости имеет место на некоторой подпоследовательности значений параметра вязкости  $\alpha$ , стремящейся к нулю, соответственно предельное функциональное решение является регулярным. Таким свойством обладают функциональные решения задач, когда априорные оценки обеспечивают принадлежность аппроксимаций рефлексивным сепарабельным пространствам, к которым, в частности, относится пространство  $L_2(\mathbb{R}_n)$ .

## § 5. ВЫДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ КОРРЕКТНОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Положим в уравнениях (2.1), (2.2) оператор  $f_0(u, x, t) \equiv u$ . Предлагаемая ниже конструкция классов корректности для задачи (2.8) основывается на выделении непустых множеств регулярных функциональных решений, определяемых однозначно начальными данными задачи Коши и обладающих непрерывной зависимостью в топологии слабой сходимости в пространстве  $L_1^{\text{loc}}$  относительно изменения начальных данных в той же топологии.

Обозначим символом  $A$  отображение, сопоставляющее регулярным функциональным решениям, заданным методом  $\mathcal{AM}$ , соответствующие им начальные данные. При этом, естественно, предполагается существование таких решений, что может быть установлено, например, на основании теоремы 2.1. Обозначим через  $X$  совокупность регулярных функциональных решений для метода  $\mathcal{AM}$ , которую снабдим индуцированной топологией  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ . На множестве  $M_0$  введем топологию слабой сходимости. Отметим, что индуцированная топология на совокупности  $X$  в силу формулы представления регулярных функциональных решений (2.11) может быть задана системой полунорм, определяющих слабую сходимость в пространстве  $L_1^{\text{loc}}$  вместе со слабой сходимостью в пространстве начальных данных  $M_0$ :

$$|l(F_{g, g_1})| = \left| \int_Q g_1 u v(dQ) - \int_Q g|_{t=0} u_0 v_0(dQ_0) \right|. \quad (2.24)$$

**Лемма 2.4.** *Отображение  $A: X \rightarrow M_0$  непрерывное во введенных выше топологиях.*

□ Это утверждение является очевидным следствием способа задания топологии на множествах  $X$  и  $M_0$  посредством системы полунорм (2.24). Лемма доказана. ■

Пусть множество  $K \subset X$  является компактом в топологическом пространстве  $\{[M], \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$  и отображение  $A: K \rightarrow A(K)$  взаимно однозначное. (Такой компакт всегда можно выбрать.) Тогда обратное отображение  $A^{-1}: A(K) \rightarrow K$  является непрерывным. Последнее утверждение вытекает из теоремы о гомеоморфизме (теорема 10.7).

**Лемма 2.5.** Пусть множество начальных данных  $Y \subset M_0$  слабо компактно в пространстве  $L_1^{\text{loc}}(Q_0, \nu_0)$ , а соответствующее ему непустое множество регулярных функциональных решений  $K$  слабо компактно в пространстве  $L_1^{\text{loc}}(Q, \nu)$ . Тогда множество  $K$  относительно компактно в топологии  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ .

□ Данное утверждение получим на основании формулы (2.11), представляющей регулярные функциональные решения. Справедлива оценка

$$\sup_l p_F(l) \leq \sup_{u \in K} \left| \int_Q g_1 u \nu(dQ) \right| + \sup_{u_0 \in Y} \left| \int_{Q_0} g|_{t=0} u_0 \nu_0(dQ_0) \right|.$$

Таким образом, множество  $K$  слабо ограничено в топологическом пространстве  $\{\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$  и, значит, оно слабо компактно. Лемма доказана. ■

**Замечание 2.8.** Свойства решений, указанные в лемме 2.5, устанавливаются на основании энтропийных оценок в  $L_p$ ,  $p \geq 1$ .

**Следствие 2.1.** Если семейство  $K$  регулярных функциональных решений в условиях леммы 2.5 соответствует замкнутому множеству начальных данных  $Y$ , то семейство  $K$  является компактом.

□ Данное утверждение есть непосредственное следствие свойства непрерывности отображения  $A$ , которое установлено в лемме 2.4, и слабой компактности слабо ограниченных множеств в топологии  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ . ■

**Теорема 2.5.** Пусть компактное множество  $K$  регулярных функциональных решений соответствует компактному  $Y$  во множестве начальных данных  $M_0$ . Предположим, что каждому элементу множества  $Y$  соответствует единственный элемент множества  $K$ . Тогда при этих условиях функциональные решения из множества  $K$  непрерывно зависят от начальных данных из множества  $Y$  в топологии слабой сходимости в пространстве  $L_1^{\text{loc}}$ .

□ В силу предположения о единственности прообразов отображения  $A$  во множестве  $K$ , когда образы находятся во множестве  $Y$ , с учетом свойства непрерывности отображения  $A$ , установленного в лемме 2.4, и следствия к лемме 2.5, можно применить теорему 10.7 о гомеоморфизме. Таким образом, обратное отображение  $A^{-1}: Y \rightarrow K$  — непрерывное. Но поскольку топология слабой сходимости на  $K$  слабее топологии, задаваемой полунормами (2.24), то тем более  $A^{-1}: Y \rightarrow K$  непрерывно в слабых топологиях. Теорема доказана. ■

**Замечание 2.9.** Выделение компактов, указанных в формулировке теоремы 2.5, естественно осуществлять в классах однозначной разрешимости, существование которых установлено в теореме 2.1.

## § 6. ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В СРЕДНЕМ

Выполним вложение части функциональных решений системы законов сохранения во множество борелевых регулярных мер, основываясь на идеях работ [263, 202]. Рассмотрим функционалы из пространства  $[M] \subset \mathcal{E}^+$ , которые допускают представление

$$l(F) = \int_Q F(d\lambda \otimes d\mu), \quad \forall F \in \mathcal{E}^+, \quad (2.25)$$

где  $\lambda$  — борелева конечная на компактах мера, а входящие в (2.25) величины определены выше в настоящей главе.

**Определение 2.8.** Борелеву меру  $\lambda$  назовем решением в среднем задачи Коши для системы законов сохранения, если функционал  $l \in [M] \subset \mathcal{E}^+$  в соотношении (2.25) является функциональным решением задачи Коши для системы законов сохранения. Если же решение в среднем допускает разложение

$$\lambda = \mu_{(x,t)} \otimes d_x \otimes d_t,$$

где параметрическое семейство борелевых мер  $\mu_{(x,t)}$  измеримо по  $(x, t)$  и является вероятностным, то указанное семейство назовем *мерозначным решением*.

**Определение 2.9.** Если мерозначное решение допускает представление

$$\mu_{(x,t)}(du) = \delta(du - u(x, t))$$

с некоторой борелевой функцией  $u(\cdot, \cdot)$ , то эту функцию назовем *обобщенным решением задачи Коши*.

Одним из центральных вопросов теории является установление условий, обеспечивающих вложение функциональных решений в решения в среднем, далее, решений в среднем в мерозначные, а последних — в обобщенные. На этом пути интересные результаты получены Л. Таргтаром [263], указавшим способ получения таких вложений для одного квазилинейного закона сохранения в теории компенсированной компактности.

### § 7. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

Для решения вопроса о предельном переходе в нелинейных суперпозициях приближений для неизвестного решения задачи Коши используется следующая лемма.

**Лемма 2.6.** Пусть  $(M, \rho)$  — метрическое пространство,

$$\eta: M \rightarrow \mathbb{R}_1^+$$

— непрерывная положительная функция такая, что для каждого натурального числа  $n$  можно указать компакт  $K_n \subset M$ , на дополнении которого выполняется неравенство

$$\eta(x) \geq c_n, \quad x \in M - K_n, \quad (c_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty). \quad (2.26)$$

Пусть  $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$  — последовательность регулярных борелевых мер на пространстве  $(M, \rho)$ , подчиняющихся требованию

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \langle \eta, \mu_i \rangle < \infty. \quad (2.27)$$

Тогда можно указать такую подпоследовательность  $\{\mu_{i_k}\}_{k=1}^\infty$  и регулярную борелеву меру  $\mu$ , что для каждой непрерывной функции  $\Phi$ , удовлетворяющей требованию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M \setminus K_n} \frac{|\Phi(x)|}{\eta(x)} = 0, \quad (2.28)$$

справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \Phi, \mu_{i_k} \rangle = \langle \Phi, \mu \rangle.$$

□ Рассмотрим замкнутое подмножество

$$D = \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \right].$$

Очевидно, носитель  $\text{supp } \mu_i$  меры  $\mu_i$  при каждом номере  $i \in \mathbb{N}$  содержится в  $D$ . Метрическое пространство  $(D, \rho)$  сепарабельное,

ибо оно в качестве всюду плотного подмножества содержит счетное объединение метрических компактов. Последовательность мер  $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ , рассмотренная на  $\sigma$ -алгебре борелевых множеств пространства  $(D, \rho)$ , является слабо компактной в силу теоремы Прохорова [26, 69], ибо из условий (2.26), (2.27) следуют оценки

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(D) < \infty, \quad \mu_i(D \setminus K_n) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{\mu_j(D)}{c_n}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Выберем из  $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$  слабо сходящуюся подпоследовательность  $\mu_{i_k}$  на пространстве  $(D, \rho)$ . Таким образом, для каждой непрерывной на пространстве  $(M, \rho)$  функции  $\Phi$  справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \tilde{\chi}_N(\Phi), \mu_{i_k} \rangle = \langle \tilde{\chi}_N(\Phi), \mu \rangle,$$

где срезающая функция  $\tilde{\chi}_N$  задается следующим выражением:

$$\tilde{\chi}_N(\Phi) = \begin{cases} \Phi, & |\Phi| \leq N, \\ N \operatorname{sgn}(\Phi), & |\Phi| \geq N, \end{cases} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Пусть непрерывная функция  $\Phi$  удовлетворяет требованию (2.28) леммы. Тогда оценка (2.27) обеспечивает ее суммируемость на пространстве  $(M, \rho)$  по каждой мере  $\mu_i$ , при этом справедливы соотношения

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \langle (1 - \chi_{K_n})|\Phi|, \mu_i \rangle \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\chi_{K_n}$  — характеристическая функция компакта  $K_n$ . Продолжим регулярную борелеву меру  $\mu$ , являющуюся слабым пределом последовательности  $\mu_i$  на борелевых множествах в пространстве  $(D, \rho)$ , до регулярной борелевой меры на  $\sigma$ -алгебру борелевых множеств в пространстве  $(M, \rho)$  посредством соотношения

$$\mu(A) = \mu(A \cap D),$$

где  $A$  — произвольное множество из этой  $\sigma$ -алгебры. При такой конструкции носитель меры  $\mu$  сосредоточен на множестве  $D$ . По построению меры  $\mu$  имеем оценку

$$\langle \eta, \mu \rangle < \infty, \quad (2.29)$$

из которой следует суммируемость каждой непрерывной функции  $\Phi$ , удовлетворяющей условиям леммы. Сочетание слабой сходимости меры  $\mu_{i_k}$  к  $\mu$  на множестве  $D$  с равномерными оценками (2.26), (2.29) приводит к утверждению леммы. Лемма доказана.  $\blacksquare$

**Замечание 2.10.** Регулярность борелевых мер, определенных формулой

$$\mu_u = \delta_u \otimes d_x \otimes d_t, \tag{2.30}$$

для борелевых функций  $u$  является следствием теоремы Лузина [94] (*C-свойство борелевых функций*). Мету  $\mu_u$  ниже будем называть *мерой, сосредоточенной на графике функции  $u$* .

### § 8. РАЗРЕШИМОСТЬ В СРЕДНЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Одним из центральных вопросов, связанных с глобальной разрешимостью задачи Коши (2.1), (2.2), является выделение класса решений, получаемых как предел исчезающей вязкости  $\varepsilon \rightarrow 0$  для решений сингулярно возмущенной задачи

$$\begin{aligned} \partial_t f_0^{(\omega)}(u^\varepsilon, x, t) + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_j^{(\omega)}(u^\varepsilon, x, t) - f_{n+1}^{(\omega)}(u^\varepsilon, x, t) = \\ = B(\varepsilon) \Delta_x u^\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} \omega \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

где  $\Delta_x$  — оператор Лапласа по пространственным переменным,

$$B(\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots), \quad \varepsilon_i \geq 0.$$

Предположим разрешимость вязкой задачи (2.31), (2.32) при положительных значениях параметров  $\varepsilon$ . Метод решения задачи (2.1), (2.2), основанный на приближениях  $u^\varepsilon$ , назовем *методом исчезающей вязкости*. Обозначим  $\mu^\varepsilon$  меры (2.30), сосредоточенные на графиках аппроксимаций  $\mu^\varepsilon$ .

**Теорема 2.6.** Пусть задача (2.31), (2.32) имеет решение в целом (классическое либо обобщенное) для некоторой последовательности значений параметров  $\varepsilon^k$ , которая на каждой компоненте  $\varepsilon_i^k$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Пусть существует непрерывная положительная функция  $\eta: \mathbb{R}_m \rightarrow \mathbb{R}_1^+$ , удовлетворяющая на пространстве  $\mathbb{R}_m$  требованиям леммы 2.5, для которой при каждом  $T > 0$  справедлива равномерная по  $\varepsilon$  априорная оценка

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}_n} \eta(u^\varepsilon(t, x)) dt dx \leq c(T) < \infty. \tag{2.33}$$

Предположим, что

$$f_j^{(\omega)}: \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m, \quad 0 \leq j \leq n, \quad \omega \in \mathbb{N},$$

— непрерывные функции, на каждом компакте  $K \subset \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\eta(\lambda)]^{-1} \sum_{j=0}^{n+1} \sup_{(t,x) \in K} |f_j^{(\omega)}(\lambda, t, x)| = 0, \quad (2.34)$$

$$\lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} \sup [\eta(\lambda)]^{-1} |\lambda^i| < \infty, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда задача (2.1), (2.2) имеет решение в среднем, которое является пределом по некоторой подпоследовательности решений задачи (2.31), (2.32).

□ Для каждой финитной на пространстве  $\mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n$  функции  $\Phi \in C^2$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \langle f_0 \partial_t \varphi + \sum_{j=1}^n f_j \partial_{x_j} \Phi + f_{n+1} \Phi, \mu^\varepsilon \rangle + \\ & + \langle (f_0 \Phi)|_{t=0}, \mu_0 \rangle_0 + B(\varepsilon) \langle \Delta_x \Phi \lambda, \mu^\varepsilon \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Эквивалентной формой для оценки (2.33) является неравенство

$$\langle \theta_T \eta, \mu^\varepsilon \rangle \leq c(T),$$

где  $\theta_T = \theta(T - t)$ ,  $\theta$  — функция Хевисайда. Применим лемму 2.5 к семейству  $\mu^\varepsilon$  на метрическом пространстве

$$\mathbb{R}_m \times K, \quad K \subset \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n \quad (K\text{—компакт}).$$

Стандартным диагональным процессом, примененным к указанной последовательности мер на последовательности метрических пространств  $\mathbb{R}_m \times K_i$  ( $\cup K_i = \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n$ ), получаем подпоследовательность мер  $\mu^{\varepsilon^k} \rightarrow \mu$ , для которой в силу соотношения (2.34) имеют место формулы

$$\begin{aligned} & |\langle \Phi \lambda_i, \mu^{\varepsilon^k} \rangle| \leq \text{const}, \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \Phi f_j^{(\omega)}, \mu^{\varepsilon^k} \rangle = \langle \Phi f_j^{(\omega)}, \mu \rangle, \\ & i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j \leq n + 1, \end{aligned}$$

при произвольной финитной непрерывной функции  $\Phi$ . Переходя к пределу  $k \rightarrow \infty$  (вязкость стремится к нулю) в соотношении (2.35), устанавливаем, что предельная мера  $\mu$  является решением в среднем задачи (2.1), (2.2). Теорема доказана. ■

**§ 9. ПРИМЕР. ГРАДИЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ  
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Положим в системах (2.1) и (2.31)

$$f_0 = \lambda, \quad f_j = \nabla_u F_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad f_{n+1} = 0, \quad \nabla_u = (\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_n}),$$

где  $F_j$  — гладкие скалярные функции. В этом случае система имеет дополнительный закон сохранения

$$\partial_t \eta + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} q_i = 0,$$

где функция

$$\eta(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

а потоки

$$q_j = (\nabla_u F_j, \lambda) - F_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Для соответствующей задачи (2.35) с матрицей вязкости

$$B(\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

справедливо неравенство

$$\frac{\partial \eta(u^\varepsilon)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_j(u^\varepsilon)}{\partial x_j} \leq \varepsilon \Delta_x \eta(u^\varepsilon),$$

интегрируя которое для подходящего класса начальных данных по переменным  $t, x$ , приходим к неравенству (2.33).

**Теорема 2.7.** Пусть  $F_j, 1 \leq j \leq n$  — непрерывно дифференцируемые функции по  $u \in \mathbb{R}_m$ , градиенты которых  $f_j = \nabla_u F_j$  удовлетворяют соотношениям (2.34) и являются непрерывными функциями на  $\mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n$ . Если начальная функция  $u_0 \in L_2^m(\mathbb{R}_n)$ , то градиентная система

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \nabla_u F_j}{\partial x_j} = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

имеет решение в среднем, которое является пределом (в смысле слабой сходимости мер) решений в среднем задачи с исчезающей вязкостью (2.35), где

$$B(\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$



Доказательство теоремы 2.7 основано на теореме 2.6 и следующих двух леммах.

**Лемма 2.7.** Пусть в дополнение к условиям теоремы 2.7 функции  $F_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , дважды непрерывно дифференцируемые и финитные на  $\mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n$ , а начальные данные

$$u_0 \in L_2^m(\mathbb{R}_n) \cap L_\infty^m(\mathbb{R}_n).$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  задача (2.35) имеет единственное гладкое решение  $u^\varepsilon$  при всех  $t > 0$ , которое подчиняется неравенству

$$\int_{\mathbb{R}_n} \eta(u^\varepsilon(t, x)) dx \leq \int_{\mathbb{R}_n} \eta(u_0(t, x)) dx, \quad t \geq 0.$$

□ Построение гладкого решения, локального по времени  $t > 0$ , осуществляется методом сжимающих отображений в пространстве  $L_\infty^m$ . На решении выполняется тождество

$$u^\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}_n} G_\varepsilon(t, x - \xi) u_0(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^n \int_0^t \int_{\mathbb{R}_n} \frac{\partial G_\varepsilon(t - \tau, x - \xi)}{\partial x_j} \nabla_u F_j(u^\varepsilon(\tau, \xi), \tau, \xi) d\tau d\xi,$$

где  $G_\varepsilon$  — функция Грина оператора теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \Delta_x, \quad \varepsilon > 0,$$

на пространстве  $\mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n$ . В силу финитности функций  $F_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , имеем

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L_\infty^m(\mathbb{R}_n)} \leq \|u_0(\cdot)\|_{L_\infty^m(\mathbb{R}_n)} + \text{const}(\varepsilon) \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} d\tau, \quad (2.36)$$

$$t > 0.$$

Из неравенства

$$\frac{\partial \eta(u^\varepsilon)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_j(u^\varepsilon)}{\partial x_j} \leq \varepsilon \Delta_x \eta(u^\varepsilon)$$

за счет требования финитности функций  $F_j$  получаем следующую оценку:

$$\int_{\mathbb{R}_n} \eta(u^\varepsilon(t, x)) dx \leq \int_{\mathbb{R}_n} \eta(u_0(t, x)) dx, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

которая в сочетании с неравенством (2.36) обеспечивает продолжение локального решения задачи (2.35) на все  $t > 0$  с требуемыми в лемме свойствами. Лемма доказана. ■

**Лемма 2.8.** Пусть выполнены условия теоремы 2.7. Тогда задача (2.35) при любом  $\varepsilon > 0$  имеет решение в среднем, получающееся как предел решений этой задачи с финитными гладкими функциями  $\{F_j\}$ . (Предел понимается в смысле слабой сходимости мер на каждой полосе  $\mathbb{R}_m \times K$ , где  $K$  — компакты в  $\mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n$ .)

Доказательство этой леммы является непосредственным следствием леммы 2.6.

Доказательство теоремы 2.7 — это следствие теоремы 2.6 и лемм 2.6 и 2.7.

## § 10. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ВЫБОРЕ КЛАССОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В заключение отметим, что в большинстве задач, использующих те или иные методы для построения приближений функционального решения, пространство  $M$  удобно выбирать так, чтобы классические решения и аппроксимации принадлежали  $M$ . В частности, в случае метода разностных схем разумно использовать кусочно-непрерывные функции. В практических целях естественно использовать вместо сходимости обобщенных последовательностей сходимость последовательностей, занумерованных натуральными числами. Для этого можно сузить векторное пространство основных функций, используя счетное множество разделяющих основных функций на пространстве  $M$ . Линейное пространство  $\mathcal{E}$  строится как множество конечных линейных комбинаций указанного множества разделяющих функций над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Очевидно, тогда  $\mathcal{E}$  имеет счетную мощность. В этом случае тихоновская топология  $\{\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$  в алгебраически сопряженном пространстве  $\mathcal{E}^+$  задается счетным множеством полунорм, которая метризуется естественным образом. Множество  $M$  вкладываем в пространство  $\mathcal{E}^+$  посредством мономорфного вложения Янга (2.6). На образе этого вложения рассматриваем индуцированную метрику и проводим процедуру пополнения метрического пространства на образе. Элементы такого пополнения составляют класс функциональных решений, для которого имеет место обычная сходимость аппроксимаций.

## УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНОВСКОГО ТИПА

### § 1. ОПЕРАТОРЫ СТОЛКНОВЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(x, t)}{\partial t} + L(u) = S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(x, t)), \quad (3.1)$$

$$\omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (3.2)$$

где оператор  $L(\cdot)$  — производящий оператор полугруппы переноса частиц без взаимных столкновений (в операторе  $L(\cdot)$  не учитываются взаимодействия между частицами рассматриваемой системы; локальные взаимные столкновения частиц моделируются оператором  $S$ ). Свойства оператора  $L(\cdot)$  применительно к случаю свободного переноса частиц будут детализированы ниже в § 5, 6 гл. 3. Уравнение (3.1) будем называть уравнением *больцмановского типа*, если оператор  $S$  удовлетворяет требованиям, указанным в определениях 3.1–3.3. Задачу (3.1), (3.2) назовем пространственно однородной, если неизвестная  $u$  не зависит от переменной  $x \in \mathbb{R}_n$ .

Выделим класс операторов столкновений  $S$  в уравнении (3.1), который включает при некоторых ограничениях на ядро взаимодействия  $\Phi$  операторы столкновений в моделях Больцмана и Смолуховского (1.5), (1.8), (1.9).

Определим требования на множество  $\Omega$ , являющиеся естественным обобщением свойств множества состояний частиц для моделей Больцмана и Смолуховского.

Пусть  $\Omega$  — локально компактное сепарабельное метрическое пространство, которое  $\sigma$ -конечно относительно плотной борелевой меры  $\mu$ . Эта мера предполагается конечной на компактах в  $\Omega$ , строго положительной на открытых множествах в  $\Omega$ . (Борелева мера называется *плотной*, если

$$\mu(E) = \sup_{E \supset K \in \mathcal{K}} \mu(K),$$

где  $\mathcal{K}$  — класс компактных подмножеств из пространства  $\Omega$ .)

Назовем борелевой  $\sigma$ -алгеброй на  $\Omega$  наименьшую  $\sigma$ -алгебру, содержащую в себе все открытые и, следовательно, замкнутые подмножества заданной топологии  $\tau$  на множестве  $\Omega$ . Функцию  $f$  на заданном топологическом пространстве  $\{\Omega, \tau\}$  со значениями во множестве действительных или комплексных чисел называем борелевой, если прообразы  $f^{-1}$  борелевых подмножеств во множестве чисел являются элементами борелевой  $\sigma$ -алгебры на  $\Omega$ .

Обозначим символами  $d_x$  и  $d_t$  лебеговы меры на пространствах  $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$  и  $\mathbb{R}_1 = \{t\}$  соответственно;  $\overset{\circ}{B}$  — множество финитных ограниченных борелевых функций на топологическом произведении

$$Q = \Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1; \quad Q_0 = \Omega \times \mathbb{R}_n;$$

$\overset{\circ}{B}^\infty$  — множество бесконечно дифференцируемых по переменным  $(x, t) \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1$  функций из пространства  $\overset{\circ}{B}$ , производные которых лежат в  $\overset{\circ}{B}$ ;  $L_1^{\text{loc}}(A, \nu)$  — множество борелевых функций на множестве  $A$ , локально суммируемых по борелевой мере  $\nu$ .

Кроме того, пусть  $B(\Omega)$  — совокупность борелевых функций на множестве  $\Omega = \{\omega\}$  состояний элементов моделируемой физической системы,  $L_1(\Omega, \mu)$  — множество функций из  $L_1^{\text{loc}}(\Omega, \mu)$ , суммируемых по борелевой мере  $\mu$  на множестве  $\Omega$ ;  $\langle f, \mu \rangle$  — интеграл Лебега функции  $f$  из пространства  $L_1(\Omega, \mu)$  по мере  $\mu$  на множестве  $\Omega$ . Индекс  $+$  у символа множества функций означает, что рассматриваются только неотрицательные функции.

Пусть  $S$  — частично определенное на  $B(\Omega)$  отображение со значениями в  $B(\Omega)$ . Положим

$$G_\mu(S) = S^{-1}(L_1(\Omega, \mu)), \quad \|f\|_{L_1} \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \mu \rangle,$$

и предположим, что множество  $\overset{\circ}{B}$  плотное в пространстве  $L_1$  относительно топологии, заданной нормой  $\|f\|_{L_1}$ .

**Определение 3.1.** Множество  $K_\mu \subset G_\mu(S)$  назовем *множеством  $\mu$ -сохранения* оператора  $S$ , если для каждого  $f \in K_\mu$  справедливо равенство (соотношение сохранения)

$$\langle S(f), \mu \rangle = 0.$$

Считаем, что оператор  $S: G_\mu(S) \rightarrow B(\Omega)$  обладает свойством  $\mu$ -сохранения, если множество  $\overset{\circ}{B}(\Omega) \cap G_\mu(S) \subset K_\mu$  плотное в  $G_\mu(S)$  относительно нормы  $\|f\|_{L_1}$ .

**Определение 3.2.** Множеством  $\mu$ -диссипации оператора  $S: G_\mu(S) \rightarrow B(\Omega)$  назовем семейство  $D_\mu \subset G_\mu(S)$  такое, что

для каждого  $f \in D_\mu$  выполнено соотношение диссипации

$$\langle S(f), \mu \rangle \leq 0.$$

Если множество  $\overset{\circ}{B}^+(\Omega) \cap G_\mu(S) \subset D_\mu$  плотное в  $G_\mu(S) \cap L_1^+(\Omega, \mu)$  в норме  $\|\cdot\|_{L_1}$ , то оператор  $S$  считаем обладающим свойством  $\mu$ -диссипации.

**Определение 3.3.** Пусть  $G_\mu(S)$  — область определения оператора  $S$  — содержит множество  $\overset{\circ}{B}$ . Будем говорить, что оператор  $S$  удовлетворяет *условию положительности*, если для каждой функции  $f \in \overset{\circ}{B}^+$  можно указать такое число

$$H(\|f\|_{L_1}, \text{supp } f) \geq 0$$

(символ  $\text{supp}$  означает носитель функции  $f$ ), что выполнено неравенство

$$S(f) + Hf \geq 0.$$

**Замечание 3.1.** Операторы (1.5), (1.8), (1.9) удовлетворяют свойствам, перечисленным в определениях 3.1–3.3, при условии что ядро взаимодействия частиц  $\Phi$  является измеримой, локально ограниченной, неотрицательной, симметричной функцией по аргументам, задающим состояния взаимодействующих частиц.

**Замечание 3.2.** Функционал  $H$  без ограничения общности можно считать монотонно возрастающим по своим аргументам.

Действительно, достаточно рассмотреть новый функционал  $H$ , равный супремуму значений функционала  $H$  на шаре  $\|f\|_{L_1} \leq r$ .

**Лемма 3.1.** Пусть оператор  $S$  удовлетворяет свойствам, перечисленным в определениях 3.1–3.3. Тогда  $S(0) = 0$ .

□ В силу определения 3.3 значения  $S(0) \geq 0$  из-за неотрицательности функции  $f = 0$ . Требования определений 3.1 или 3.2 приводят к неравенству

$$\langle S(0), \mu \rangle \leq 0.$$

Таким образом, неотрицательная функция  $S(0)$  имеет неположительный интеграл, т. е. почти везде  $S(0) = 0$ . Лемма доказана. ■

Обозначим

$$\chi_M^{(\omega)} = \begin{cases} 1, & \omega \in M \subset \Omega, \\ 0, & \omega \notin M, \end{cases}$$

$$\theta_N(y) = \begin{cases} |y|, & |y| \leq N \in \mathbb{N}, \\ N, & |y| \geq N, \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}.$$

**Определение 3.4.** Назовем  $S$  оператором *больцмановского типа*, если он обладает свойствами  $\mu$ -сохранения или диссипации и положительности, а для каждого компакта  $M$  во множестве  $\Omega$  суперпозиция

$$S_M(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_M \times S \circ (\chi_M \times |\cdot|)$$

(где  $\times$  — оператор умножения,  $\circ$  — оператор суперпозиции) такова, что  $S_M(L_1(M, \mu)) \subset L_1(M, \mu)$ , причем отображение

$$S_M: L_1(M, \mu) \rightarrow L_1(M, \mu)$$

является непрерывным в метрике этого пространства.

**Лемма 3.2.** Если оператор  $S$  — *больцмановского типа*, то таким же свойством обладает отображение  $S_M$  для каждого компакта  $M \subset \Omega$ .

□ Утверждение леммы следует из общего факта, что каждый оператор  $S$  со свойством сохранения либо диссипативности порождает свойство диссипативности у операторов  $S_M$ . Действительно, финитная неотрицательная функция  $\chi_M \times |f|$ , где  $f \in \mathring{B}(\Omega)$ , входит в область определения оператора  $S$ .

Рассмотрим интеграл

$$\langle S_M(f), \mu \rangle = \int_M S(\chi_M \times |f|) \mu(d\omega).$$

Отметим, что интегрирование в правой части этого равенства распространяется только по носителю неотрицательной функции, стоящей под знаком оператора  $S$ . Но требование положительности в определении 3.3 означает неотрицательность значений  $S^{(\omega)}(f)$  при любой неотрицательной функции  $f$ , если аргументы  $\omega$  находятся вне носителя функции  $f$ , ибо

$$S(f) + fH \geq 0,$$

а последнее слагаемое в левой части этого неравенства обращается в нуль вне носителя  $f$ . Поскольку для операторов со свойством сохранения или диссипации на неотрицательных функциях выполняется неравенство  $\langle S(f), \mu \rangle \leq 0$ , то, учитывая неотрицательность  $S(\chi_M \times f)$  вне множества  $M$ , заключаем, что

$$\int_M S(\chi_M \times |f|) \mu(d\omega) \leq 0$$

для любой ограниченной борелевой функции  $f$ . Но множество таких функций плотно в  $L_1(M, \mu)$ . Воспользовавшись свойством непрерывности  $S_M$  на  $L_1(M, \mu)$ , заключаем, что это неравенство распространяется на все пространство  $L_1(M, \mu)$ .

Свойство положительности оператора  $S_M$  автоматически следует из такого же свойства оператора  $S$ . Лемма доказана. ■

## § 2. РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНОВСКОГО ТИПА

Предлагаемая ниже разностная схема для приближенного решения обобщенных уравнений Больцмана позволяет установить корректность задачи Коши с ядрами взаимодействия частиц и начальными данными, представляющими интерес для физики реальных процессов. В частности, для пространственно неоднородных уравнений Больцмана и Смолуховского достаточным условием глобальной корректности задачи Коши задачи является локальная ограниченность (т.е. ограниченность на каждом компакте) неотрицательных симметричных ядер взаимодействия и скорости свободного переноса частиц, а также суммируемость неотрицательных начальных данных.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(x, t)}{\partial t} + L(u) = S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(x, t)), \quad (3.3)$$

$$\omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

$$L(u)|_{(x,t)}^{(\omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n v_i^{(\omega)} \frac{\partial u^{(\omega)}(x, t)}{\partial x_j}, \quad (3.4)$$

$$u|_{t=0} = u_0,$$

с оператором  $S$  больцмановского типа. Следующая разностная схема задает приближенный метод решения задачи Коши (3.3), (3.4):

$$\begin{aligned} & \frac{u_\alpha^{(\omega)}(x, t + \tau) - u_\alpha^{(\omega)}(x, t)}{\tau} - \sum_{j=1}^n \theta_{n_1}(v_j^{(\omega)}) \frac{u_\alpha^{(\omega)}(x - h e_j \operatorname{sgn}(v_j^{(\omega)}), t) - u_\alpha^{(\omega)}(x, t)}{h} = \\ & = S_{M_1}^{(\omega)}(u_\alpha^{(\cdot)}(x, t)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\omega \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad h > 0,$$

$$u_\alpha^{(\omega)}(x, t) = \chi_{M_1}^{(\omega)} \chi_{M_2}^{(x)} \theta_{n_2}(u_0^{(\omega)}(x)),$$

$$0 \leq t < \tau, \quad \alpha = (n_1, n_2, M_1, M_2, \tau, h),$$

где компакты  $M_1 \subset \Omega$ ,  $M_2 \subset \mathbb{R}_n$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — координатные орты в  $\mathbb{R}_n$ . Шаги сетки  $\tau$ ,  $h$  подчиняются условию Куранта—Фридрихса—Леви:

$$\begin{aligned}
 nn_1\tau h^{-1} + \tau H \left( \sup_{x \in \mathbb{R}_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n \mathbb{R}_n} \int \chi_{M_1}^{(\omega)} \chi_{M_2}^{(x)} \theta_{n_1} \times \right. \\
 \left. \times \left( u_0^{(\omega)} \left( x + h \sum_{j=1}^n k_j e_j \right) \right) \mu(d\omega), M_1 \right) \leq 1, \tag{3.6} \\
 k = (k_1, \dots, k_n).
 \end{aligned}$$

**Замечание 3.3.** Оценку (3.6) можно использовать в более грубой форме

$$nn_1\tau h^{-1} + \tau H((2D/h)^n n_2 \mu(M_1), M_1) \leq 1,$$

если компакт  $M_2$  положить  $n$ -мерным кубом со стороной  $D$ .

**Лемма 3.3.** При любых положительных  $\tau, h$ , удовлетворяющих соотношению (3.6), разностная схема (3.5) имеет неотрицательное решение  $u_\alpha$ .

□ Утверждение леммы получим методом математической индукции, применяемой к отрезкам времени, длины которых кратны шагу  $\tau$ . Очевидно, что на первом шаге  $0 \leq t < \tau$  утверждение о неотрицательности решения  $u_\alpha$  является прямым следствием формул (3.5). Дальнейшее доказательство основывается на применении неравенства (3.6) в сочетании с формулами (3.5) и предположением о больцмановости оператора  $S$ . А именно, в силу задания приближения решения  $u_\alpha$  соотношениями (3.5) имеем:

$$\begin{aligned}
 u_\alpha^{(\omega)}(x, t + \tau) = \left\{ u_\alpha^{(\omega)}(x, t) \left[ 1 - \frac{\tau}{h} \sum_{j=1}^n \theta_{n_1}(v_j^{(\omega)}) \right] + \right. \\
 \left. + \tau S_{M_1}^{(\omega)}(u_\alpha^{(\cdot)}(x, t)) \right\} + \tag{3.7} \\
 + \frac{\tau}{h} \sum_{j=1}^n \theta_{n_1}(v_j^{(\omega)}) u_\alpha^{(\omega)}(x - h e_j \operatorname{sgn}(v_j^{(\omega)}), t).
 \end{aligned}$$

Предположение о неотрицательности решения  $u_\alpha$  при  $0 \leq t < m\tau$  ( $m > 1$ ) в сочетании с равенством (3.7) приводит к неравенству

$$\begin{aligned}
 u_\alpha^{(\omega)}(x, t + \tau) \geq u_\alpha^{(\omega)}(x, t) \left[ 1 - \frac{\tau}{h} \sum_{j=1}^n n_1 \right] + \tau S_{M_1}^{(\omega)}(u_\alpha^{(\cdot)}(x, t)), \\
 x \in \mathbb{R}_n, \quad 0 \leq t < m\tau,
 \end{aligned}$$



которое усилим за счет условия (3.6):

$$u_{\alpha}^{(\omega)}(x, t + \tau) \geq \tau [u_{\alpha}^{(\omega)}(x, t)H + S_{M_1}^{(\omega)}(u_{\alpha}^{(\cdot)}(x, t))], \quad (3.8)$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad 0 \leq t < m\tau,$$

где аргументы величины  $H$  такие же, как в формуле (3.6).

Проинтегрируем выражение (3.5) по мере  $\mu$ , относительно которой определялись бoльцмановские свойства оператора  $S$ , а затем просуммируем полученное выражение по пространственным переменным, находящимся на кубической решетке в  $\mathbb{R}_n$  со стороны, равной шагу сетки  $h$ . Отметим, что разностный оператор, заменяющий пространственные производные, обладает свойством сохранения относительно такого процесса суммирования. Действительно, рассмотрим меру  $\nu(dx)$ , сосредоточенную на узлах  $\{x_i\}$  целочисленной решетки в  $\mathbb{R}_n$  с шагом по каждой координате, равным  $h$ . Зададим значения этой меры, положив для каждого ограниченного множества  $A \in \mathbb{R}_n$

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i: x_i \in A} 1.$$

Очевидно, для каждой финитной ограниченной функции  $f$  на пространстве  $\mathbb{R}_n$  определен интеграл

$$\int_{\mathbb{R}_n} f(x) \nu(dx) = \sum_i f(x_i).$$

Учитывая то, что операция сдвига  $\Delta_h^{(j)}$  аргумента функции  $f$  на шаг  $h$  по  $j$ -й координатной оси

$$\Delta_h^{(j)} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x + he_j)$$

не меняет значение правой части этой формулы, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}_n} \Delta_h^{(j)} f(x) \nu(dx) = \sum_i f(x_i),$$

для разностного оператора

$$\Delta_h^{(j)} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x + h) - f(x)$$

получаем свойство сохранения

$$\int_{\mathbb{R}_n} \Delta_h^{(j)} f(x) \nu(dx) = 0.$$

Таким образом, учитывая утверждение леммы 3.2, заключаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \int_{\Omega} u_{\alpha}^{(\omega)}(x + h \sum_{j=1}^n k_j e_j, t + \tau) \mu(d\omega) \leq \\ & \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \int_{\Omega} u_{\alpha}^{(\omega)}(x + h \sum_{j=1}^n k_j e_j, t) \mu(d\omega), \\ & k = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, в области  $0 \leq t < m\tau$ ,  $m > 1$ , где  $u_{\alpha} \geq 0$ , выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \int_{\Omega} u_{\alpha}^{(\omega)}(x + h \sum_{j=1}^n k_j e_j, t) \mu(d\omega) \leq \\ & \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \int_{\Omega} u_{\alpha}^{(\omega)}(x + h \sum_{j=1}^n k_j e_j, 0) \mu(d\omega). \end{aligned}$$

Учитывая свойство монотонного возрастания функционала  $H$  по каждому аргументу, получаем оценку

$$\begin{aligned} & H\left(\int_{\Omega} u_{\alpha}^{(\omega)}(x, t) \mu(d\omega), M_1\right) \leq \\ & \leq H\left(\sup_{y \in \mathbb{R}_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \int_{\Omega} u_{\alpha}^{(\omega)}(y + h \sum_{j=1}^n k_j e_j, 0) \mu(d\omega), M_1\right), \\ & \forall x \in \mathbb{R}_n. \end{aligned}$$

Сочетая это неравенство с требованием определения 3.3 в неравенстве (3.8), устанавливаем неотрицательность его правой части, а значит, и функции  $u_{\alpha}^{(\omega)}(x, t)$  при  $m\tau \leq t < (m + 1)\tau$ . Тем самым завершается процесс математической индукции. Утверждение доказано. ■

**Замечание 3.4.** Решение разностной схемы (3.5) при выполнении условия (3.6) удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^{(\omega)}(x, t) & \equiv \chi_{M_1}^{(\omega)} |u_{\alpha}^{(\omega)}(x, t)|, \\ & x \in \mathbb{R}_n, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

**Замечание 3.5.** Неотрицательное решение разностной схемы (3.5) подчиняется неравенству

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}_n} u_{\alpha}^{(\omega)}(x, t) \mu(d\omega) dx \leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}_n} u_{\alpha}^{(\omega)}(x, 0) \mu(d\omega) dx, \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

Вопрос о разрешимости задачи (3.3) рассматривается ниже в классах функциональных решений [43, 47, 51, 52].

### § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА К ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ

**Теорема 3.1.** Пусть в задаче Коши (3.3), (3.4) оператор  $S$  — бoльцмановского типа,  $v$  — локально ограниченная борелева функция со значениями в пространстве  $\mathbb{R}_n$ ,

$$u_0 \in L_{1,+}(\Omega \times \mathbb{R}_n, \mu \otimes d_x),$$

где множество  $\Omega$  представимо в виде счетного объединения компактов, оператор  $S$  обладает свойством  $\mu$ -сохранения или диссипации. Тогда задача Коши (3.3) (3.4) имеет неотрицательное функциональное решение в целом, т. е. при всех значениях  $t \geq 0$ .

□ Приближенный метод решения задачи Коши (3.3), (3.4) основывается на применении разностной схемы (3.5), (3.6). Наличие свойства  $\mu$ -сохранения или диссипации у оператора  $S$  обеспечивает оценку (3.10). Отметим, что суперпозиция  $(S_{M_1} \circ u_\alpha)$  является локально суммируемой функцией на  $\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$ . Действительно, по построению в силу (3.9) и (3.10) функция  $u_\alpha$  обладает свойством локальной суммируемости на  $\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$ . Так как функция  $v$  по условию теоремы локально ограничена, то все слагаемые в левой части тождества (3.5) также локально суммируемые функции, а значит, такая же его правая часть  $(S_{M_1} \circ u_\alpha)$ .

Отметим также, что соотношения (3.9) и (3.10) означают слабую устойчивость разностного метода (3.5), (3.6), так как из них следует неравенство

$$\sup_{\alpha} \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times [0, T]} |u_\alpha| \mu \otimes d_x \otimes d_t \leq T \sup_{\alpha} \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n} |u_0| \mu \otimes d_x, \quad \forall T \geq 0,$$

что по определению является свойством слабой устойчивости приближенного метода (см. определение 2.5).

Тождество (3.9) в сочетании со способом задания операторов  $S_{M_1}$  в определении 3.4 приводит к равенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \varphi^{(\omega)}(x, t) S_{M_1} \circ u_\alpha \mu \otimes d_x \otimes d_t = \\ & = \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \varphi^{(\omega)}(x, t) S \circ u_\alpha \mu \otimes d_x \otimes d_t, \end{aligned} \quad (3.11)$$

для любой функции

$$\varphi \in \overset{\circ}{B}(\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+),$$

у которой носитель содержится внутри множества  $M_1 \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$ . Требование локальной ограниченности функции  $v$  означает, что на каждом компакте  $K \subset \Omega$  при достаточно больших значениях параметра  $n_1$  значения функций

$$\theta_{n_1}(v_j^{(\omega)}), \quad v_j^{(\omega)} \quad (1 \leq j \leq n, \quad \omega \in K),$$

совпадают при каждом  $j$ . Следовательно, для любой функции  $\varphi \in \overset{\circ}{B}(\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+)$  при достаточно больших значениях параметра  $n_1$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \varphi^{(\omega)}(x, t) \theta_{n_1}(v_j^{(\omega)}) u_\alpha(x, t) \mu \otimes dx \otimes dt = \\ & = \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \varphi^{(\omega)}(x, t) v_j^{(\omega)} u_\alpha^{(\omega)}(x, t) \mu \otimes dx \otimes dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Перейдем к вычислению слабой невязки разностного метода (3.5), (3.6) с учетом соотношений (3.11), (3.12). Естественно, предполагается, что условия, обеспечивающие справедливость этих соотношений, выполнены. Для этого достаточно положить, что значения параметра  $n_1$  последовательно пробегают натуральные числа, а компакты  $M_1$  образуют счетную последовательность, исчерпывающую  $\Omega$ . Последняя существует в силу предположений теоремы. Умножим тождество (3.5) на пробную функцию  $\varphi \in \overset{\circ}{B}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+)$  и проинтегрируем его на  $\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$  по мере  $\mu \otimes dx \otimes dt$ . Сходимость интегралов в данном случае обусловлена локальной суммируемостью всех членов в (3.5). Предполагая  $n_1$  и  $M_1$  достаточно большими, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \{ \tau^{-1} [ \chi_\tau(t) \varphi^{(\omega)}(x, t - \tau) - \varphi^{(\omega)}(x, t) ] u_\alpha^{(\omega)}(x, t) - \\ & - h^{-1} \sum_{j=1}^n [ \varphi^{(\omega)}(x + h e_j \operatorname{sgn}(v_j^{(\omega)}), t) - \varphi^{(\omega)}(x, t) ] |v_j^{(\omega)}| u_\alpha^{(\omega)}(x, t) - \\ & - \varphi^{(\omega)}(x, t) S^{(\omega)}(u_\alpha^{(\cdot)}(x, t)) \} \mu \otimes dx \otimes dt = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где функция  $\chi_\tau(t)$  равна 1 при  $0 \leq t \leq \tau$ , а при остальных аргументах обращается в нуль.

Разложим по формуле Тейлора до второй производной включительно конечные разности для функции  $\varphi$  в этом выражении, что возможно из-за включения  $\varphi \in \overset{\circ}{B}^\infty$ . Таким образом, подставляя указанные разложения в (3.13), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+ \setminus \{0, \tau\}} \left[ -\varphi_t^{(\omega)}(x, t) + \frac{\tau}{2} \varphi_{tt}^{(\omega)}(x, \eta) \right] u_\alpha^{(\omega)}(x, t) \mu \otimes dx \otimes dt - \\ & - \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[ \varphi_{x_j}^{(\omega)}(x, t) + \frac{h}{2} \varphi_{x_j x_j}^{(\omega)}(\xi_j, t) \right] v_j^{(\omega)} u_\alpha^{(\omega)}(x, t) - \right. \\ & \quad \left. - \varphi^{(\omega)}(x, t) S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(x, t)) \right\} \mu \otimes dx \otimes dt - \\ & \quad - \tau^{-1} \int_0^\tau dt \int_{\mathbb{R}_n} dx \int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x, t) u_\alpha^{(\omega)}(x, t) d\mu = 0, \\ & \quad t - \tau \leq \eta \leq t, \quad \xi_j \in [x_j - h, x_j + h], \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Итак, величина невязки в соответствии с этим выражением определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} \delta(F) = & \left| \int_\tau^\infty \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \frac{\tau}{2} \varphi_{tt}^{(\omega)}(x, \eta) u_\alpha^{(\omega)}(x, t) dt dx \mu(d\omega) + \right. \\ & + \int_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \frac{h}{2} \varphi_{x_j x_j}^{(\omega)}(\xi_j, t) v_j^{(\omega)} u_\alpha^{(\omega)}(x, t) dt dx \mu(d\omega) + \\ & + \tau^{-1} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x, t) u_\alpha^{(\omega)}(x, t) dt dx \mu(d\omega) - \\ & - \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x, 0) u_\alpha^{(\omega)}(x, 0) dx \mu(d\omega) + \\ & + \left. \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \varphi_t^{(\omega)}(x, t) u_\alpha^{(\omega)}(x, t) dt dx \mu(d\omega) \right| + \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x, 0) u_\alpha^{(\omega)}(x, 0) dx \mu(d\omega) - \right. \\ & \left. - \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x, 0) u_0^{(\omega)}(x) dx \mu(d\omega) \right|. \end{aligned}$$

Неравенство (3.10) с учетом неотрицательности функции  $u_\alpha$ , ограниченности производных финитной функции  $\varphi$  для первых двух слагаемых в выражении для невязки приводит к оценке невязки величиной

$$O(\tau + h),$$

где постоянная не зависит от параметра метода  $\alpha$ . Перейдем к оценке остальных слагаемых невязки. Отметим, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} u_\alpha^{(\omega)}(x, t) &= u_0^{(\omega)}(x, 0), \\ 0 &\leq t < \tau. \end{aligned}$$

Учитывая это соотношение в следующей паре слагаемых невязки, получаем

$$\begin{aligned} &\left| \tau^{-1} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x, t) u_\alpha^{(\omega)}(x, t) dt dx \mu(d\omega) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x, 0) u_\alpha^{(\omega)}(x, 0) dx \mu(d\omega) \right| \leq \\ &\leq \tau^{-1} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega |\varphi^{(\omega)}(x, t) - \varphi^{(\omega)}(x, 0)| u_\alpha^{(\omega)}(x, 0) dt dx \mu(d\omega) \leq \\ &\leq \tau \sup |\varphi_t| \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega u_\alpha^{(\omega)}(x, 0) dx \mu(d\omega) \leq \\ &\leq \tau \sup |\varphi_t| \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega u_0^{(\omega)}(x) dx \mu(d\omega) = O(\tau). \end{aligned}$$

Следующее слагаемое оценивается аналогично:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega \varphi_t^{(\omega)}(x, t) u_\alpha^{(\omega)}(x, t) dt dx \mu(d\omega) \right| \leq \\ &\leq \tau \sup |\varphi_t| \int_{\mathbb{R}_n} \int_\Omega u_0^{(\omega)}(x) dx \mu(d\omega) = O(\tau). \end{aligned}$$

Величина в правой части этого неравенства не зависит от параметра  $\alpha$  приближенного метода.

Оценим теперь последнюю пару слагаемых невязки, связанных с начальными данными:

$$\left| \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\Omega} \varphi^{(\omega)}(x, 0) u_{\alpha}^{(\omega)}(x, 0) dx \mu(d\omega) - \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\Omega} \varphi^{(\omega)}(x, 0) u_0^{(\omega)}(x) dx \mu(d\omega) \right| \leq \\ \leq \sup |\varphi| \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\Omega} |\chi_{M_1}^{(\omega)} \chi_{M_2}^{(x)} \theta_{n_2}(u_0^{(\omega)}(x)) - u_0^{(\omega)}(x)| dx \mu(d\omega).$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю для любых последовательностей компактов  $M_1$  и  $M_2$ , исчерпывающих соответственно пространства  $\Omega$  и  $\mathbb{R}_n$ , при условии что  $n_2 \rightarrow \infty$ . Итак, выбирая таким образом параметры метода  $\alpha$  и устремляя  $\tau, h$  к нулю при соблюдении условия Куранта (3.6), устанавливаем стремление невязки метода (3.5) к нулю. Тем самым установлено свойство слабой аппроксимации разностного метода (3.5), (3.6) (определение 2.3). Сочетая это свойство со слабой устойчивостью метода (определение 2.5), заключаем, что он сходится к функциональному решению задачи Коши (3.1), (3.2) (теорема 2.1). Утверждение доказано. ■

Очевидные по своей важности приложения этой теоремы к задачам, связанным с кинетическими уравнениями Больцмана и Смолуховского, рассматриваются ниже.

#### § 4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА, СМОЛУХОВСКОГО

**Теорема 3.2.** Пусть интенсивности столкновений частиц  $\Phi$  в операторах столкновений Больцмана и Смолуховского (1.5), (1.8), (1.9) являются локально ограниченными борелевыми симметричными неотрицательными функциями, а начальные данные задачи Коши — суммируемые неотрицательные функции на множестве  $\Omega \times \mathbb{R}_n$ . Предположим, что скорость свободного переноса  $v$  — борелева локально ограниченная вектор-функция. Тогда задача Коши (3.1), (3.2) обладает глобальным неотрицательным функциональным решением, которое является пределом аппроксимаций, определенных разностным методом (3.5), (3.6).

Доказательство этой теоремы практически полностью повторяет схему доказательства теоремы 3.1, и поэтому его детали опускаем.

Главным моментом является проверка условий сохранения, диссипативности и положительности для упомянутых выше операторов столкновений, сформулированных в определениях 3.1–3.3.

**Теорема 3.3.** Пусть рассматривается пространственно однородная задача Коши (3.1), (3.2) с операторами столкновений Больцмана и Смолуховского (1.5), (1.8), (1.9) в случае измеримого неотрицательного симметричного ядра  $\Phi$ , обладающего свойством локальной ограниченности (т. е. функция  $\Phi$  ограничена на каждом компакте). Предположим, что начальная функция является неотрицательной и суммируемой. Тогда указанная задача Коши, рассматриваемая как задача (3.3), (3.4) со скоростью свободного переноса  $v \equiv 0$ , обладает глобальным неотрицательным функциональным решением, которое включается в класс корректности, порождаемый предельными точками разностной схемы (3.5), (3.6) в тихоновской топологии.

Доказательство очевидным образом сводится к теореме 3.2, если положить начальные данные пространственно неоднородной постановки равными произведению пространственно однородных начальных данных на характеристическую функцию компакта ненулевой лебеговой меры в координатном пространстве  $x \in \mathbb{R}_n$ . Вложенная таким образом пространственно однородная задача в задачу (3.1), (3.2) удовлетворяет условиям теоремы 3.2. При этом на указанном компакте пространственных переменных решение не зависит от пространственных переменных и мы прямым вычислением находим, что оно соответствует определению функционального решения пространственно однородной задачи.

## § 5. УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В ряде случаев использование специфических начальных данных  $u_0$  в задаче Коши для уравнения больцмановского типа (3.1) позволяет установить разрешимость этой задачи в целом в классе обобщенных (соболевских) решений. В частности, этому способствует свойство локальной устойчивости решения, тождественно равному нулю (вакуума), всегда являющегося решением уравнений больцмановского типа. Ниже доказывается разрешимость в целом интегральной формы упомянутой задачи Коши в классе непрерывных функций при соблюдении специального условия согласования действия операторов  $S$  и  $L$ . Оператор  $L$  считаем производящим для группы или полугруппы  $T_t$ , действие которой определим ниже.



### § 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ОПЕРАТОРОВ СТОЛКНОВЕНИЯ И СВОБОДНОГО ПЕРЕНОСА

Пусть  $\Omega$  — локально компактное метрическое пространство,

$$\Sigma_\sigma = \{t \in \mathbb{R}_1 : 0 \leq t \leq \sigma\}, \quad \Sigma_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_1^+.$$

Пространство  $\Omega \times \Sigma_\sigma$ ,  $0 \leq \sigma \leq \infty$  снабдим топологией произведения. Обозначим  $C_{b,\sigma}$ ,  $0 \leq \sigma \leq \infty$ , пространство ограниченных, непрерывных на  $\Omega \times \Sigma_\sigma$  вещественных функций, которое снабдим нормой

$$\|f\|^\sigma = \sup_{\Omega \times \Sigma_\sigma} |f(\omega, t)|.$$

На пространстве  $C_b \stackrel{\text{def}}{=} C_{b,0}$  введем отношение частичного порядка  $\geq$ , полагая  $f_1 \geq f_2$ , если в каждой точке  $\omega \in \Omega$  выполняется неравенство

$$f_1(\omega) \geq f_2(\omega).$$

Неотрицательные функции  $f \geq 0$  образуют конус  $C_b^+$ . Для функций  $\varphi \in C_b$  символом  $d(\varphi)$  обозначим носитель функции  $\varphi$ .

**Определение 3.5.** Однопараметрическая полугруппа линейных преобразований

$$T_t: C_b \rightarrow C_b, \quad t \in \mathbb{R}_1^+$$

считается принадлежащей классу  $SG^+$ , если она оставляет инвариантным конус  $C_b^+$  (т. е.  $T_t$  сохраняет отношение порядка  $\geq$ ), и для каждой функции

$$f \in \bigcup_{\sigma \in \mathbb{R}_1^+} C_{b,\sigma}$$

суперпозиция  $T_t \circ f(\cdot, \tau)(\omega)$  является непрерывной функцией по совокупности аргументов  $(\omega, \tau, t)$  в топологии произведения  $\Omega \times \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1^+$ .

**Определение 3.6.** Однопараметрическая группа линейных преобразований

$$T_t: C_b \rightarrow C_b, \quad t \in \mathbb{R}_1,$$

считается принадлежащей классу  $G^+$ , если

$$\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_1^+} \in SG^+, \quad \{T_{-t}\}_{t \in \mathbb{R}_1^+} \in SG^+.$$

Пусть группа  $\{T_t\}$  принадлежит классу  $SG^+$  или  $G^+$ . С положительной полуорбитой  $\{T_t \varphi\}_{t \in \mathbb{R}_1^+}$  элемента  $\varphi \in C_b^+$  свяжем пространства функций

$$B_\sigma(\varphi) = \\ = \{f \in C_{b,\sigma} : \exists a(f) \in \mathbb{R}_1^+, |f(\omega, t)| \leq a T_t(\varphi)(\omega), 0 \leq t \leq \sigma, \omega \in \Omega\},$$

которые снабдим структурой банахова пространства посредством нормы

$$\|f\|_\varphi^\sigma = \sup_{t \in \Sigma_\sigma} \sup_{\omega \in d(T_t(\varphi))} |(T_t(\varphi)^{-1}(\omega))f(\omega, t)|.$$

Положим  $B(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} B_0(\varphi)$ . Ограниченные шары в  $B_\sigma(\varphi)$  обозначим

$$B_\sigma(\varphi, r) = \{f: \|f\|_\varphi^\sigma \leq r, r \geq 0\}.$$

Пусть на множестве  $D \subset C_b$  определено отображение

$$S: D \rightarrow C_b,$$

подчиненное требованиям согласования с полугруппой  $\{T_t\} \in SG^+$ :

$$\exists \varphi \in C_b^+ : \bigcup_{t \in \mathbb{R}_1^+} B_\sigma(T_t(\varphi)) \subset D; \quad (S_1)$$

при каждом значении  $t \geq 0$  отображение

$$S: B_\sigma(T_t(\varphi)) \rightarrow B_\sigma(T_t(\varphi))$$

является локально липшиц-непрерывным, т. е.

$$\sup_{u, v \in B_0(T_t(\varphi, r))} \|S(u) - S(v)\|_{T_t(\varphi)}^0 (\|u - v\|_{T_t(\varphi)}^0)^{-1} = L(r, t) < \infty; \quad (S_2)$$

при значениях аргументов  $r \geq 0, t \geq 0$ ;

$$S(0) = 0. \quad (S_3)$$

### § 7. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На фазовом пространстве  $C_b$  рассматривается уравнение (аналог интегральной формы пространственно неоднородной задачи Коши для уравнения Больцмановского типа)

$$f_t = T_t f^{(0)} + \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad f_t \stackrel{\text{def}}{=} f(\cdot, t). \quad (3.14)$$

**Определение 3.7.** Назовем решением уравнения (3.14) непрерывную при  $t \geq 0, \omega \in \Omega$  функцию  $f(\omega, t)$ , обращающую равенство (3.14) в тождество.

В следующей теореме устанавливаются условия, обеспечивающие однозначную разрешимость уравнения (3.14) при всех  $t \geq 0$ , когда

оператор  $S$  и полугруппа  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}^+} \in SG^+$  согласованы посредством условий  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$ .

**Теорема 3.4.** Пусть однопараметрическая полугруппа

$$\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_1^+} \in SG^+$$

и оператор  $S$  удовлетворяют требованиям  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$ , причем локальная постоянная Липшица  $L(r, t)$  в условии  $(S_2)$  мажорируется при  $r \geq 0, t \geq 0$  функцией  $q(r, t)$ , суммируемой по  $t \in \mathbb{R}_1^+$  при каждом значении параметра  $r \geq 0$ . Если для любой функции  $f \in B_\sigma(\varphi)$  суперпозиция  $S(f)$  принадлежит пространству  $B_\sigma(\varphi) \forall \sigma \geq 0$ , то для каждого  $r \geq 0$  можно указать неотрицательные числа  $r_0, \delta$  такие, что в случае  $f^{(0)} \in B_0(T_\delta \varphi, r_0)$  уравнение (3.14) имеет единственное решение  $f \in B_\infty(T_\delta \varphi, r)$ . Связь между величинами  $r, r_0, \delta$  может быть задана соотношениями

$$\lambda = \int_{\delta}^{+\infty} q(r, \tau) d\tau < 1, \quad r_0 \leq r(1 - \lambda), \quad (3.15)$$

$$r \in \mathbb{R}_1^+, \quad r_0 \in \mathbb{R}_1^+, \quad \delta \in \mathbb{R}_1^+.$$

**Теорема 3.5.** Пусть в дополнение к условиям теоремы 3.4 однопараметрическая группа  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}} \in G^+$ , а оператор  $S$  удовлетворяет требованию

$$\forall \sigma, r \in \mathbb{R}_1^+ \quad \exists h(\sigma, r) \in \mathbb{R}_1^+ : S(f) + fh \geq 0, \quad (S_4)$$

$$\forall f \geq 0, \quad f \in \bigcup_{0 \leq t \leq \sigma} B_0(T_t \varphi, r).$$

Тогда решение уравнения (3.14), указанное в теореме 3.4, является неотрицательным при всех  $t \geq 0$ , если функция  $f^{(0)} \geq 0$ .

**Пример 3.1 (кинетическое уравнение Больцмана для псевдомаксвелловских молекул).** Пусть пространство аргументов имеет вид

$$\Omega = \{(v, x) : v \in \mathbb{R}_3, x \in \mathbb{R}_3\} = \mathbb{R}_6.$$

Однопараметрическая группа  $\{T_t^a\}_{t \in \mathbb{R}_1}, a \in \mathbb{R}_3$ , задана следующим соотношением:

$$T_t^a(f)(v, x) = f\left(v + at, x - vt - \frac{1}{2}at^2\right), \quad a \in \mathbb{R}_3, \quad f \in C_b.$$

Группа  $\{T_t^a\}$  соответствует движению частиц единичной массы в  $\mathbb{R}_3$  под действием постоянной силы с потенциалом  $(a, x)$

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -a.$$

Больцмановский оператор столкновений частиц определен формулой (1.5).

Для того чтобы удовлетворить теореме 3.4, примем требования:

1°. Функция  $\Phi$ , определяющая интенсивность столкновений частиц, ограничена и непрерывна;

2°.  $\varphi(v, x) = \exp \left[ -\alpha \left( x - v\beta - \frac{1}{2}a\beta^2 \right)^2 \right]$ , где  $\alpha, \beta$  — положительные числа.

Действие однопараметрической группы свободного переноса частиц  $T_t^a$  на функцию  $\varphi$  определено формулой

$$T_t\varphi = \exp \left[ -\alpha \left( x - v(t + \beta) - \frac{1}{2}a(t + \beta)^2 \right)^2 \right]. \quad (3.16)$$

Проверим выполнение условий согласования, накладываемых на оператор столкновений и группу свободного переноса. Непосредственно из формулы (3.16) следует, что группа свободного переноса сохраняет отношение порядка на пространстве  $C_b$ . Для каждой функции

$$f \in \bigcup_{\sigma \in \mathbb{R}_1^+} C_{b,\sigma}$$

суперпозиция  $T_t(f(\cdot, \cdot, \tau))(v, x)$  является непрерывной функцией аргументов  $v, x, t, \tau$ . Таким образом, группа  $\{T_t^a\} \in G^+$ .

Для функции  $\varphi \in C_b^+$ , определенной соотношением 2°, банаховы пространства  $B_\sigma(\varphi)$  приобретают следующее конкретное содержание:

$$B_\sigma(\varphi) = \left\{ f \in C_{b,\sigma} : \|f\|_\sigma^\sigma = \sup_{\substack{(v,x) \in \mathbb{R}_6 \\ 0 \leq t \leq \sigma}} |f(v, x, t)| \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \alpha \left( x - v(t + \beta) - \frac{1}{2}a(t + \beta)^2 \right)^2 \right] < \infty \right\},$$

т. е. функции из  $B_\sigma(\varphi)$  удовлетворяют оценке

$$|f(v, x, t)| \leq K \exp \left[ -\alpha \left( x - v(t + \beta) - \frac{1}{2}a(t + \beta)^2 \right)^2 \right],$$

где  $K$  — неотрицательная постоянная. Принимая требования 1°, 2°, проверим условия согласования  $(S_1)$ – $(S_3)$ .

Поскольку пространства  $B_\sigma(T_t^a\varphi)$  состоят из функций, принадлежащих области определения оператора столкновений Больцмана  $S_B$ , то условие  $(S_1)$  выполнено.

Перейдем к проверке условия  $(S_2)$ . Пусть  $u, v \in B_\sigma(T_t^a\varphi)$ , т. е.

$$|u|, |v| \leq K \exp \left[ -\alpha \left( x - v(t + \beta) - \frac{1}{2}a(t + \beta)^2 \right)^2 \right],$$

где  $K$  — неотрицательная постоянная. В силу выполнения законов сохранения полного импульса и кинетической энергии при столкновении пары частиц имеем

$$v' + v'_1 = v + v_1, \quad v'^2 + v_1'^2 = v^2 + v_1^2, \quad (3.17)$$

откуда следует тождество

$$T_t^a(\varphi)|_{(v',x)} T_t^a(\varphi)|_{(v'_1,x)} = T_t^a(\varphi)|_{(v,x)} T_t^a(\varphi)|_{(v_1,x)}.$$

(Соотношения (3.17) рассматривались в гл. 1, например в рамках модели парных столкновений бильярдных шаров, см. рис. 1.2.)

Значит, для функции  $u \in B_\sigma(T_t^a\varphi)$  выполняется оценка

$$|S_B(u)|_{(v,x)} \leq 8\pi M \int_{\mathbb{R}} \exp \left[ -\alpha \left( x - v_1(t + \beta) - \frac{1}{2}a(t + \beta)^2 \right)^2 \right] dv_1 \times \\ \times \exp \left[ -\alpha \left( x - v(t + \beta) - \frac{1}{2}a(t + \beta)^2 \right)^2 \right] (\|u\|_{T_t\varphi}^0)^2,$$

где  $M = \sup |\Phi|$ . Выполняя интегрирование, получаем

$$|S_B(u)|_{(v,x)} \leq \frac{8\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2}}{(t + \beta)^3} \times \\ \times \exp \left[ -\alpha \left( x - v(t + \beta) - \frac{1}{2}a(t + \beta)^2 \right)^2 \right] (\|u\|_{T_t\varphi}^0)^2,$$

следовательно,

$$\sup_{u,v \in B_0(T_t\varphi,r)} \|S_B(u) - S_B(v)\|_{T_t\varphi}^0 \|u - v\|_{T_t\varphi}^0{}^{-1} \leq \\ \leq \frac{16\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2} r}{(t + \beta)^3} = L(r, t). \quad (3.18)$$

Таким образом, отображение

$$S_B: B(T_t\varphi) \rightarrow B(T_t\varphi)$$

является локально липшиц-непрерывным и выполняется условие  $(S_2)$ . Очевидно,  $S_B(0) = 0$ , т. е. справедливо условие  $(S_3)$ . Итак, условия согласования  $S_B$  и  $T_t^a$  имеют место. Локальная постоянная Липшица оператора  $S_B$

$$L(r, t) = \frac{16\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2} r}{(t + \beta)^3}, \quad t \geq 0,$$

обладает всеми свойствами, указанными в условии теоремы 3.4.

Остановимся на проверке последнего требования теоремы 3.4, связанного с принадлежностью функции  $S_B(f)$  пространству  $B_\sigma(\varphi)$ ,

если функция  $f$  находится в том же пространстве. В силу оценки (3.18) для  $f \in B_\sigma(\varphi)$  справедливо неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq \sigma} |S_B(f(\cdot, x, t))(v)| [T_t(\varphi)]^{-1} \leq 8\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2} \beta^{-3} \|f\|_\varphi^\sigma < \infty. \quad (3.19)$$

Следовательно, осталось убедиться в непрерывности суперпозиции  $S_B(f(\cdot, x, t))(v)$  по тройке аргументов  $(v, x, t) \in \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \times \Sigma_\sigma$ . Отметим, что из требования непрерывности функций  $\Phi(v, v_1, q)$  и  $f$  вытекает непрерывность подынтегрального выражения в формуле для значения оператора  $S_B(f)$ . Для доказательства непрерывности упомянутых интегралов по  $(v, x, t)$  достаточно установить их равномерную сходимость относительно изменения этих параметров на компактах в пространстве  $\mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \times \Sigma_\sigma$ . Для функций  $f \in B_\sigma(\varphi)$  справедлива оценка

$$|f(v, x, t)| \leq K \exp(-\gamma v^2), \quad \|x\|_{\mathbb{R}_3} \leq X, \quad t \in \Sigma_\sigma, \quad (3.20)$$

где постоянные  $K, \gamma > 0$  определяются значениями величин

$$\|f\|_\varphi^\sigma, \quad \alpha, \quad \beta, \quad a, \quad \sigma, \quad X.$$

Таким образом, подынтегральное выражение в операторе столкновений Больцмана оценивается при  $\|x\|_{\mathbb{R}_3} \leq X, t \in \Sigma_\sigma$  следующим выражением:

$$K[\exp(-\gamma v'^2) \exp(-\gamma v_1'^2) + \exp(-\gamma v^2) \exp(-\gamma v_1^2)],$$

где  $K$  — неотрицательная постоянная, и кроме того,

$$v, v_1 \in \mathbb{R}_3, \quad \|x\|_{\mathbb{R}_3} \leq X, \quad t \in \Sigma_\sigma.$$

Итак,

$$\left| \int_{\substack{\|\theta\|_{\mathbb{R}_3}=1 \\ \|v_1\|_{\mathbb{R}_3} \geq R}} (v, v_1, \theta) [f(v', x, t) f(v_1', x, t) - f(v, x, t) f(v_1, x, t)] dv_1 d\theta \right| \leq \\ \leq C \exp(-\gamma v^2) \int_{\|v_1\|_{\mathbb{R}_3} \geq R} \exp(-\gamma v_1^2) dv_1, \\ \|x\|_{\mathbb{R}_3} \leq X, \quad t \in \Sigma_\sigma,$$

с некоторой постоянной  $C$ . Поскольку

$$\int_{\|v_1\|_{\mathbb{R}_3} \geq R} \exp(-\gamma v_1^2) dv_1 \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

то интегралы в выражении для оператора столкновений Больцмана сходятся равномерно относительно изменения параметров  $(v, x, t)$  на компактах в пространстве  $\mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \times \Sigma_\sigma$ , поэтому делаем заключение о непрерывности суперпозиции  $S_B(f(\cdot, x, t))(v)$  по указанным аргументам. Сочетая это утверждение с оценкой (3.19), устанавливаем

принадлежность суперпозиции  $S_B(f)$  пространству  $B_\sigma(\varphi)$ , если в этом пространстве находится функция  $f$ . Итак, полагая в соответствии с обозначениями теоремы 3.4

$$q(r, t) = \frac{16\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2} r}{(t + \beta)^3},$$

можно воспользоваться ее результатом для уравнения Больцмана в интегральной форме, которое однозначно разрешимо в пространстве  $B_\infty(\varphi)$ , если имеют место условия 1°, 2°. При этом начальная функция  $f^{(0)}$  удовлетворяет неравенству

$$|f^{(0)}| \leq r_0 \exp \left[ -\alpha \left( x - v\beta - \frac{a\beta^2}{2} \right)^2 \right],$$

где связь между постоянными выбирается из соотношения

$$\lambda = 8\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2} r \beta^{-2} < 1, \quad r_0 \leq r(1 - \lambda) \quad \forall r \geq 0.$$

На решении уравнения Больцмана выполняется оценка

$$|f(v, x, t)| \leq r \exp \left[ -\alpha \left( x - v(t + \beta) - \frac{1}{2} a(t + \beta)^2 \right)^2 \right], \\ t \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}_3, \quad x \in \mathbb{R}_3.$$

Если дополнительно предположить, что функция  $\Phi \geq 0$ , то неотрицательной начальной функции соответствует неотрицательное единственное решение интегрального уравнения Больцмана при всех  $t \geq 0$  (утверждение теоремы 3.5).

Первые утверждения такого типа для уравнения Больцмана кинетической теории газов были получены Bellomo и Toskani [188].

## § 8. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ОПРЕДЕЛЕННОГО ПРАВОЙ ЧАСТЮ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Нижеследующее доказательство теоремы 3.4 основано на рассмотрении отображения

$$\Phi: B_\sigma(\varphi) \rightarrow B_\sigma(\varphi),$$

определенного формулами

$$\psi = \Phi(f), \\ \psi_t = T_t f^{(0)} + \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \sigma. \quad (3.21)$$

Отметим здесь важность требований теоремы 3.4 о принадлежности суперпозиции  $S(f)$  пространству  $B_\sigma(\varphi)$ , ибо в этом случае  $f$  является непрерывной ограниченной функцией из пространства  $C_{b,\sigma}$ ,

а в силу требований на  $T_t$  суперпозиция  $T_{t-\tau} \circ S(f_\tau)$  — непрерывная функция. Пусть  $K(\omega_0)$  — компактная окрестность точки  $\omega_0 \in \Omega$ . Таким образом,  $T_{t-\tau} \circ S(f_\tau(\cdot))(\omega)$  является равномерно непрерывной функцией на компакте

$$K(\omega_0) \times \{(\tau, t) : 0 \leq \tau \leq t, \quad t \in \Sigma\}.$$

Значит, интеграл

$$\int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau(\cdot))(\omega) \, d\tau$$

является непрерывной функцией параметров  $(\omega, t)$ , т. е. значения оператора  $\Phi$  лежат в пространстве непрерывных функций по аргументам  $(\omega, t) \in \Omega \times \sum_\sigma$ . Покажем теперь, что  $\Phi(f) \in B_\sigma(\varphi)$ . Для этого воспользуемся тем, что  $S(f) \in B_\sigma(\varphi)$ , т. е. имеет место оценка

$$|S(f_\tau)| \leq \|S(f)\|_\varphi^\sigma T_\tau(\varphi), \quad 0 \leq \tau \leq \sigma.$$

Поскольку  $\{T_t\} \in SG^+$ , то из предыдущего неравенства следует

$$|T_{t-\tau} \circ S(f_\tau)| \leq CT_{t-\tau} \circ T_\tau(\varphi) = CT_t(\varphi), \quad 0 \leq t \leq \sigma,$$

с некоторой постоянной  $C$ . Интегрируя по времени, получаем

$$\left| \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau) \, d\tau \right| \leq CT_t(\varphi), \quad 0 \leq t \leq \sigma,$$

откуда вытекает оценка

$$\sup_{\substack{\omega \in d(T_t \varphi) \\ 0 \leq t \leq \sigma}} [T_t(\varphi)]^{-1} \left| \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau) \, d\tau \right| \leq C,$$

означающая, что  $\Phi(f) \in B_\sigma(\varphi)$ .

**Лемма 3.4.** Пусть выполнены условия теоремы 3.4. Если

$$f^{(0)} \in B_0(T_\delta(\varphi), r_0), \quad f \in B_\sigma(T_\delta(\varphi), r), \quad \delta \geq 0,$$

то для функции  $\psi = \Phi(f)$  справедливо неравенство

$$\|\psi\|_{T_\delta(\varphi)}^\sigma \leq r_0 + r \int_0^\sigma q(r, \tau + \delta) \, d\tau, \quad (3.22)$$

и, следовательно, при выполнении соотношений (3.15) шар  $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$  инвариантен относительно отображения  $\Phi$  для начальной функции  $f^{(0)} \in B_0(T_\delta(\varphi), r_0)$ .



□ В силу формулы (3.21) имеем

$$|\psi_t| \leq T_t(|f^{(0)}|) + \int_0^t T_{t-\tau} \circ |S(f)| d\tau, \quad 0 \leq t \leq \sigma. \quad (3.23)$$

Условия леммы гарантируют выполнение неравенств

$$|f^{(0)}| \leq r_0 T_\delta(\varphi), \quad |f_\tau| \leq r T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \leq \tau \leq \sigma. \quad (3.24)$$

Сочетая условия  $(S_2)$ ,  $(S_3)$ , получаем

$$\sup_{u \in B_0(T_t \varphi, r)} \|S(u)\|_{T_t \varphi}^0 [\|u\|_{T_t \varphi}^0]^{-1} \leq L(r, t) \leq q(r, t), \quad r \geq 0, t \geq 0.$$

Заменяя в этом неравенстве функцию  $\varphi$  на  $T_\delta \varphi$ , имеем

$$\|S(u)\|_{T_t T_\delta \varphi}^0 \leq q(r, t + \delta) \|u\|_{T_t T_\delta \varphi}^0.$$

Применим это неравенство к функции  $f \in B_\sigma(T_\delta(\varphi), r)$ , и, таким образом,

$$|S(f_\tau)| \leq q(r, \tau + \delta) \|f\|_{T_\tau T_\delta \varphi}^0 T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \leq \tau \leq \sigma.$$

Поскольку

$$\|f\|_{T_\tau T_\delta \varphi}^0 \leq r, \quad 0 \leq \tau \leq \sigma,$$

ибо  $f \in B_\sigma(T_\delta(\varphi), r)$ , то

$$|S(f_\tau)| \leq q(r, \tau + \delta) r T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \leq \tau \leq \sigma.$$

Сочетая это неравенство с (3.23) и (3.24), имеем

$$|\psi_t| \leq r_0 T_t(T_\delta(\varphi)) + \int_0^t T_{t-\tau} [q(r, \tau + \delta) r T_{\tau+\delta}(\varphi)] d\tau,$$

и, значит,

$$|\psi_t| \leq T_{t+\delta}(\varphi) \left[ r_0 + r \int_0^t q(r, \tau + \delta) d\tau \right], \quad 0 \leq t \leq \sigma.$$

Воспользовавшись определением  $\|\psi\|_{T_\delta \varphi}^\sigma$ , получаем

$$\|\psi\|_{T_\delta \varphi}^\sigma \leq r_0 + r \int_0^\sigma q(r, \tau + \delta) d\tau, \quad \delta, \sigma \geq 0. \quad (3.25)$$

Этим неравенством обосновывается первая часть утверждения леммы. Устремляя значения параметра  $\sigma \rightarrow +\infty$  в соотношении (3.25), приходим к оценке

$$\|\psi\|_{T_\delta\varphi}^\infty \leq r_0 + r \int_0^\infty q(r, \tau + \delta) d\tau = r_0 + r\lambda.$$

Подчиним величины  $r, r_0, \lambda$  требованиям теоремы 3.4, вследствие чего предыдущее неравенство переходит в неравенство

$$\|\psi\|_{T_\delta\varphi}^\infty \leq r,$$

что означает

$$\Phi(f) \in B_\infty(T_\delta(\varphi), r), \quad \text{если } f \in B_\infty(T_\delta(\varphi), r).$$

Таким образом, шар  $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$  инвариантен относительно отображения  $\Phi$ . Лемма доказана. ■

### § 9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4

Для доказательства воспользуемся результатом леммы 3.4. Выполнение условий (3.15) обеспечивает инвариантность шара  $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$  относительно отображения  $\Phi$ . Установим, что указанные условия обеспечивают сжатость отображения  $\Phi$  на метрическом пространстве  $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$ . Для произвольных функций  $u, v \in B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$  справедливо неравенство

$$|\Phi(u)|_t - \Phi(v)|_t| \leq \int_0^t T_{t-\tau} [|S(u)|_\tau - S(v)|_\tau|] d\tau, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (3.26)$$

Учитывая, что для  $u, v \in B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$  выполняется оценка

$$\max\{|u_\tau|, |v_\tau|\} \leq rT_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \leq \tau < +\infty,$$

имеем

$$u_\tau, v_\tau \in B_0(T_{\tau+\delta}(\varphi), r), \quad \tau \in \mathbb{R}_1^+.$$

Применяя условие  $(S_2)$ , получаем

$$\|S(u_\tau) - S(v_\tau)\|_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}^0 \left[ \|u_\tau - v_\tau\|_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}^0 \right]^{-1} \leq L(r, \tau + \delta), \quad (3.27)$$

и, следовательно,

$$|S(u_\tau) - S(v_\tau)| \leq \|u_\tau - v_\tau\|_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}^0 q(r, \tau + \delta) T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

Усилим за счет этого соотношения неравенство (3.26):

$$|\Phi(u)|_t - \Phi(v)|_t| \leq T_{\tau+\delta}(\varphi) \int_0^t \|u_\tau - v_\tau\|_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}^0 q(r, \tau + \delta) d\tau, \quad (3.28)$$

$$0 \leq t < \infty.$$

Поскольку

$$\|u_\tau - v_\tau\|_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}^0 \leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}^+} \|u_\tau - v_\tau\|_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \|u - v\|_{T_\delta(\varphi)}^\infty,$$

то выполняются оценки

$$|\Phi(u)|_t - \Phi(v)|_t| \leq T_{\tau+\delta}(\varphi) \|u - v\|_{T_\delta(\varphi)}^\infty \int_0^t q(r, \tau + \delta) d\tau,$$

$$0 \leq t < \infty,$$

следовательно,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{T_\delta(\varphi)}^\infty \leq \|u - v\|_{T_\delta(\varphi)}^\infty \int_\delta^{+\infty} q(r, \tau) d\tau = \lambda \|u - v\|_{T_\delta(\varphi)}^\infty.$$

Условие (3.15) гарантирует, что постоянная  $\lambda < 1$ , т. е. отображение

$$\Phi: B_\infty(T_\delta(\varphi), r) \rightarrow B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$$

— сжимающее. Итак, уравнение (3.14) имеет единственное решение в  $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$ , если выполнены условия теоремы (3.14). Очевидно, это решение единственное в классе функций  $B_\infty(T_\delta(\varphi))$ . Теорема доказана.

**Замечание 3.6.** Решение уравнения (3.14) при выполнении условий теоремы 3.4 может быть найдено как предел последовательных приближений

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)},$$

$$f_t^{(n+1)} = T_t f^{(0)} + \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau^{(n)}) d\tau,$$

$$t \geq 0, n \geq 0,$$

где начальное приближение  $f^{(0)}$  — произвольная функция из  $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$ ; в частности, для вычислений удобно положить начальное приближение совпадающим с начальными данными в интегральном уравнении (3.14).

**§ 10. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ  
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (3.14)**

Для построения неотрицательных решений уравнения (3.14), указанных в теореме 3.4, докажем следующую лемму.

**Лемма 3.5.** Пусть положительные числа  $r_0, r$  связаны соотношением  $r_0 < r$ . Тогда для функции  $f^{(0)} \in B_0(T_\delta(\varphi), r_0)$  отображение

$$\Phi: B_\sigma(T_\delta(\varphi), r) \rightarrow B_\sigma(T_\delta(\varphi), r), \quad \delta > 0$$

является сжимающим при достаточно малом положительном числе  $\sigma(r, r_0, \delta)$ .

□ Для доказательства леммы воспользуемся оценкой (3.16) при  $0 \leq t \leq \sigma$ , предполагая, что

$$u, v \in B_\sigma(T_\delta(\varphi), r).$$

Таким образом,

$$|\Phi(u)|_t - \Phi(v)|_t| \leq T_{\tau+\delta}(\varphi) \int_0^t \|u_\tau - v_\tau\|_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}^0 q(r, \tau + \delta) d\tau, \quad (3.29)$$

$$0 \leq t < \infty.$$

Величину  $\sigma > 0$  выберем так, чтобы отображение подчинялось требованию

$$\Phi: B_\sigma(T_\delta(\varphi), r) \rightarrow B_\sigma(T_\delta(\varphi), r).$$

Существование такого числа  $\sigma(r, r_0, \delta)$  обеспечивается оценкой

$$\|\Phi(u)\|_{T_\delta(\varphi)}^\sigma \leq r_0 + r \int_0^\sigma q(r, \tau + \delta) d\tau,$$

установленной в лемме 3.4. Действительно, по условию леммы 3.5  $r_0 < r$  и, значит, при достаточно малом  $\sigma(r, r_0, \delta) > 0$  выполнено неравенство

$$r_0 + r \int_0^\sigma q(r, \tau + \delta) d\tau \leq r,$$

что обеспечивает инвариантность шара  $B_\sigma(T_\delta(\varphi), r)$  относительно отображения  $\Phi$ . Для такого выбора числа  $\sigma(r, r_0, \delta)$  достаточно удовлетворить неравенству

$$\int_0^\sigma q(r, \tau + \delta) d\tau \leq 1 - \frac{r_0}{r}.$$

В этом случае из неравенства (3.29) следует соотношение

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{T_\delta(\varphi)}^{\sigma(r, r_0, \delta)} \leq \lambda \|u - v\|_{T_\delta(\varphi)}^{\sigma(r, r_0, \delta)}, \quad 0 \leq \lambda < 1,$$

обеспечивающее сжатость отображение  $\Phi$  на шаре  $B_\sigma(T_\delta(\varphi), r)$ . Лемма доказана.  $\blacksquare$

**Замечание 3.7.** Для доказательства леммы 3.5 достаточно вместо суммируемости функции  $q$  по переменной  $\tau \in \mathbb{R}^+$  потребовать ее локальную суммируемость.

**Следствие 3.1.** При выполнении условий теоремы 3.4 для любой функции  $f^{(0)} \in B(T_\tau(\varphi))$  уравнение (3.14) имеет единственное решение

$$f \in B_\sigma(T_\tau(\varphi)),$$

где  $\sigma$  — достаточно малое положительное число. В этом случае достаточно требовать лишь локальную суммируемость функции  $q$ .

### Доказательство теоремы 3.5

□ Достаточно установить локальное сохранение свойства положительности решения при положительных значениях времени  $t$ , ибо сочетание свойства локального наследования неотрицательности с результатом теоремы 3.4 позволяет утверждать неотрицательность решения в целом при всех  $t \geq 0$ .

Рассмотрим оператор

$$\tilde{S}: B_0(T_t(\varphi), r) \rightarrow B(T_t(\varphi)), \quad 0 \leq t \leq \sigma,$$

определенный формулой

$$\tilde{S}(f) = S(|f|) + |f|h - fh,$$

где постоянная  $h$  выбрана для семейства шаров

$$\bigcup_{0 \leq t \leq \sigma} B_0(T_t(\varphi), r)$$

в соответствии с условием  $(S_4)$ . Рассмотрим вопрос о разрешимости уравнения

$$f_t = T_t f^{(0)} + \int_0^t T_{t-\tau} \circ \tilde{S}(f_\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (3.30)$$

на шаре  $B_\sigma(\varphi, r)$  при достаточно малом положительном  $\sigma$  и  $\|f^{(0)}\|_\varphi < r$ . Для этой цели воспользуемся следствием 3.1 в случае операторов, у которых постоянная Липшица в условии  $(S_2)$  на шаре  $B_0(T_t(\varphi), r)$  оценивается величиной  $L(r, t) + 2h$ , где  $L(r, t) -$

локальная постоянная Липшица оператора  $S$  на указанном шаре. Таким образом, учитывая требования теоремы 3.4 на оператор  $S$ , заключаем, что оператор  $\tilde{S}$  имеет на  $B_0(T_t(\varphi), r)$  постоянную Липшица, локально суммируемую на пространстве  $\mathbb{R}^+$ . В силу следствия 3.1 при любой функции

$$f^{(0)} \in B(T_\tau(\varphi)), \quad \tau \geq 0,$$

уравнение (3.30) имеет единственное решение  $f \in B_\sigma(T_\tau(\varphi))$ , где  $\sigma$  — достаточно малое положительное число. В частности, если  $r_0 < r$ , то при достаточно малом  $\sigma > 0$  решение  $f \in B_\sigma(T_\tau(\varphi), r)$ , если  $f^{(0)} \in B_0(T_\tau(\varphi), r_0)$ . По условию  $(S_4)$ , входящему в требования теоремы 6.2, в этом случае справедливо соотношение

$$S(|f_t|) + |f_t|h \geq 0, \quad 0 \leq t \leq \sigma. \quad (3.31)$$

Из тождества (3.29), выполняющегося при  $0 \leq t \leq \sigma$ , следует, что

$$T_{-t}(f_t) + h \int_0^t T_{-t}(f_\tau) d\tau = f^{(0)} + \int_0^t T_{-t} [S(|f_\tau|) + |f_\tau|h] d\tau, \quad t \geq 0.$$

В силу (3.31) подынтегральное выражение справа неотрицательное, а все суперпозиции под символом интегралов непрерывные. Значит,

$$T_{-t}(f_t) \geq f^{(0)} \exp(-ht), \quad t \geq 0,$$

и потому

$$f_t \geq T_t f^{(0)} \exp(-ht), \quad t \geq 0.$$

Правая часть последнего неравенства неотрицательная, если  $f^{(0)} \geq 0$ . Итак, на построенном решении уравнения (3.30) справедливо тождество  $|f_t| \equiv f_t$ , из которого следует  $\tilde{S}(f_t) \equiv S(f_t)$ ,  $0 \leq t \leq \sigma$ . Значит, решение уравнения (3.30) совпадает с решением уравнения (3.14) при  $0 \leq t \leq \sigma$ , которое, таким образом, является неотрицательным. Теорема доказана. ■

### § 11. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Простейшей математической моделью для задач физической кинетики является задача Коши (3.1), (3.2) в пространственно однородном случае

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(t)}{\partial t} = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(t)), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad (3.1_0)$$

$$f|_{t=0} = f_0, \quad (3.2_0)$$

для плотности функции распределения частиц  $f(\omega, t)$ . Уравнение (3.1<sub>0</sub>) будем рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве  $L_1(\mu)$  (т. е. на совокупности классов эквивалентности суммируемых по абсолютной величине функций на множестве  $\Omega$  по регулярной борелевой мере  $\mu$ )

$$\frac{df(t)}{dt} = S(f), \quad t > 0. \quad (3.32)$$

На множестве  $L_1(\mu)$  введена структура банахова пространства с нормой

$$\|f\|_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \langle |f|, \mu \rangle.$$

Производная  $\frac{df(t)}{dt}$  отображения  $t \mapsto f(t)$ ,  $t > 0$  определяется условием

$$\|f(t+h) - f(t) - h \frac{df(t)}{dt}\|_\mu = o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Вероятностная природа рассматриваемых задач определяет естественный класс решений уравнения (3.32) в конусе неотрицательных классов  $L_1^+(\mu) \subset L_1(\mu)$ .

Для описания эволюции конкретного ансамбля кинетических пространственно однородных систем к уравнению (3.32) следует добавить начальную плотность распределения

$$f|_{t=0} = f^{(0)} \in L_1^+(\mu), \quad (3.33)$$

и, таким образом, приходим к рассмотрению задачи Коши (3.32), (3.33) в конусе  $L_1^+(\mu)$  [33].

**Теорема 3.6.** Пусть оператор столкновений

$$S: L_1^+(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$$

обладает свойством  $\mu$ -сохранения или диссипации, а также свойством положительности с постоянной  $H$ , общей для каждого шара

$$B_+(r) = \{f: \|f\|_\mu \leq r\}.$$

Пусть оператор  $S$  является локально липшиц-непрерывным, т. е. на каждом шаре  $B_+(r)$  справедливо соотношение

$$\sup_{f, g \in B_+(r)} \|S(f) - S(g)\|_\mu \|f - g\|_\mu^{-1} = L(S, r) < \infty.$$

Тогда для любой начальной функции  $f^{(0)} \in L_1^+(\mu)$  существует единственное решение задачи Коши (3.32), (3.33). На этом решении (в соответствии со свойствами оператора  $S$  — диссипации или сохранения) убывает или сохраняется неизменным значение интеграла

$\langle f(t), \mu \rangle$ . При этом указанное решение можно получить как предел в норме  $\|\cdot\|_\mu$  следующих итераций:

$$f_{n+1} = f^{(0)} \exp(-Ht) + \int_0^t \exp[-H(t-\tau)] \{S(f_n) + f_n H\} d\tau, \quad (3.34)$$

$$n \geq 0, \quad t \geq 0,$$

где начальное приближение  $f_0$  задается произвольным кусочно-непрерывным отображением  $t \mapsto f_0 \in B_+(r)$ . Сходимость итераций  $f_n$  равномерная на каждом отрезке  $0 \leq t \leq T$ .

**Замечание 3.8.** Решением уравнения (3.32) называем гладкое относительно нормы  $\|\cdot\|_\mu$  отображение  $t \mapsto f(t)$  из  $\mathbb{R}^+$  в  $L_1^+(\mu)$ , обращающее (3.32) в тождество.

**Замечание 3.9.** Описанный в теореме 3.6 класс задач содержит уравнение Больцмана для псевдомаквелловских молекул, исследованное впервые Моргенштерном [250], и уравнение Смолуховского с ограниченной интенсивностью взаимодействия частиц, рассмотренное Мелзаком [244–248].

**Замечание 3.10.** Из предположений теоремы 3.6 следует равенство  $S(0) = 0$ .

Действительно, в силу условия положительности имеем

$$S(0) + 0H \geq 0,$$

т. е.  $S(0) \geq 0$ , но в силу соотношения диссипации выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} S(0)\mu(d\omega) \leq 0$$

и, значит, почти всюду на  $\Omega$  выполняется соотношение  $S(0) = 0$ .

**Замечание 3.11.** Аналог итерационного процесса (3.34) впервые для кинетических уравнений применен Т. Карлеманом [88] и Д. Моргенштерном [250] в случае кинетического уравнения Больцмана. В отличие от последнего итерационный метод (3.34) обладает нелокальной сходимостью.

**Замечание 3.12.** Если оператор  $S$  обладает свойством сохранения и на начальном приближении  $f_0$  выполнено тождество

$$\langle f_0(t), \mu \rangle \equiv \langle f_0(0), \mu \rangle,$$

то для последующих приближений  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , справедливо такое же соотношение

$$\langle f_n(t), \mu \rangle \equiv \langle f_0(0), \mu \rangle, \quad n \geq 1.$$



**Замечание 3.13.** Если же при  $t \geq 0$  выполнено неравенство

$$\langle f_0(t), \mu \rangle \leq \langle f_0(0), \mu \rangle,$$

то на каждой итерации выполняется неравенство

$$\langle f_n(t), \mu \rangle \leq \langle f_0(0), \mu \rangle, \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

□ Обозначим  $L_1^{(T)}(\mu)$  пространство непрерывных отображений  $t \mapsto f(t)$  из  $\mathbb{R}^+$  в  $L_1^+(\mu)$  при  $0 \leq t \leq T$ , которое снабдим нормой

$$\|f\|_{\mu}^{(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_{\mu}.$$

Функции из пространства  $L_1^{(T)}(\mu)$ , принадлежащие при фиксированных  $0 \leq t \leq T$  шару  $B_+(r) = B(r) \cap L_1^+(\mu)$ , обозначим  $B_+^{(T)}(r)$ .

Фиксируем произвольную точку  $g \in B_+(r)$  и рассмотрим отображение

$$R_g: B_+^{(T)}(r) \rightarrow L_1^{(T)}(\mu),$$

определенное соотношением

$$R_g(f) = g \exp(-Ht) + \int_0^t \exp[-H(t-\tau)] [S(f) + fH] d\tau, \quad (3.35)$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Отметим некоторые важные свойства определенного таким образом семейства отображений  $\{R_g\}$ .

а) При каждом  $g \in B_+(r)$  выполняется свойство

$$R_g: B_+^{(T)}(r) \rightarrow L_1^{(T)}(\mu).$$

б) Если справедливо неравенство

$$\langle f(t), \mu \rangle \leq \langle g, \mu \rangle, \quad t \geq 0,$$

то в этом случае

$$\langle R_g(f)(t), \mu \rangle \leq \langle g, \mu \rangle, \quad t \geq 0.$$

в) Если оператор  $S$  обладает свойством  $\mu$ -сохранения и

$$\langle f(t), \mu \rangle = \langle g, \mu \rangle, \quad t \geq 0,$$

то при  $t \geq 0$  выполнено тождество

$$\langle R_g(f)(t), \mu \rangle \equiv \langle g, \mu \rangle.$$

Перечисленные свойства отображения  $R_g$  получаются непосредственным интегрированием выражения (3.32). Следствием указанных свойств служит инвариантность шара  $B_+^{(T)}(r)$  для отображения  $R_g$  при  $g \in B_+(r)$ .

д) При любых  $g \in B_+(r)$ ,  $\varphi, \psi \in B_+^{(T)}(r)$  при целых неотрицательных  $n$  выполняются следующие неравенства:

$$\| [R_g^n(\varphi) - R_g^n(\psi)](\cdot, t) \|_\mu \leq 2r \min \left\{ \frac{[K(r)t]^n}{n!}, 1 \right\}, \quad (3.36)$$

$$t \geq 0,$$

с постоянной

$$K(r) = L(S, r) + H.$$

Установим справедливость неравенства (3.36). Из неравенства (3.35) получаем следующую оценку при  $t \geq 0$ :

$$\| [R_g(\varphi) - R_g(\psi)](\cdot, t) \|_\mu \leq \int_0^t [\|S(\varphi) - S(\psi)\|_\mu + H\|\varphi - \psi\|_\mu] d\tau.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\| [R_g(\varphi) - R_g(\psi)](\cdot, t) \|_\mu \leq K(r) \int_0^t \|\varphi - \psi\|_\mu d\tau, \quad t \geq 0.$$

Воспользовавшись инвариантностью шара  $B_+(r)$  для отображения  $R_g$  в сочетании с этим неравенством, окончательно имеем

$$\| [R_g(\varphi) - R_g(\psi)](\cdot, t) \|_\mu \leq \min \left\{ K(r) \int_0^t \|\varphi - \psi\|_\mu d\tau, 2r \right\}, \quad t \geq 0.$$

Применяя математическую индукцию по степеням отображения  $n \geq 0$ , убеждаемся в справедливости свойства д).

Рассмотрим произвольный шар  $B_+^{(T)}(r)$  при  $r \geq \|f^{(0)}\|_\mu$ . Отображение  $R_{f^{(0)}}$  переводит этот шар в себя. Из соотношения (3.36) следует сжатость степени  $R_{f^{(0)}}^n$  при достаточно большом показателе  $n$ , и по теореме о неподвижной точке [94] существует единственное решение уравнения  $f = R_{f^{(0)}}(f)$ .

Таким образом, выполняется тождество

$$f = f^{(0)} \exp(-Ht) + \int_0^t \exp[-H(t - \tau)] [S(f) + fH] d\tau, \\ 0 \leq t \leq T.$$

Непосредственным дифференцированием этого тождества убеждаемся, что функция  $f$  — решение задачи Коши (3.32), (3.33) при  $0 \leq t \leq T$ .

Отметим, что итерационный процесс (3.34) можно записать в следующем виде:

$$f_n = R_{f^{(0)}}^n(f_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя по индукции соотношения из свойств с), d), устанавливаем наличие неравенств и тождеств, указанных в формулировке теоремы для итераций  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку для неподвижной точки отображения  $R_{f^{(0)}}$  выполнено равенство

$$f = R_{f^{(0)}}(f),$$

то, применяя неравенство (3.36), получаем оценку

$$\|f_n - f\|_\mu \leq 2r \min \left\{ \frac{[K(r)t]^n}{n!}, 1 \right\}, \quad t \geq 0, \quad n \geq 0,$$

из которой следует равномерная сходимость итерационного процесса (3.34) на каждом конечном отрезке времени. Теорема доказана. ■

**Замечание 3.14.** Утверждение теоремы 3.6 распространяется на задачи, где оператор  $S$  обладает свойствами сохранения или диссипации, но при этом параметрически зависит от времени  $t$ . Можно учесть также наличие в физической системе источников частиц, распределенных с плотностью  $q(\omega, t)$ , записывая правую часть уравнения (3.32) в виде  $S(f) + q$ . В этих случаях в формулировке теоремы 4.1 требуется равномерная ограниченность локальных постоянных Липшица для  $S$  относительно  $t$  на каждом конечном промежутке  $0 \leq t \leq T$ , а функцию  $q$  следует положить неотрицательной из класса  $L_1^{(T)}(\mu)$ . Подчеркнем, что постоянная  $H$  в условии положительности должна быть общей для параметрически зависящего от времени семейства операторов  $S$  на каждом конечном промежутке изменения времени  $t$ .

**Замечание 3.15.** Если известна асимптотика  $\tilde{f}(\cdot, t)$  решения  $f$  задачи (3.32), (3.33) при  $t \rightarrow +\infty$ , то, сочетая ее с итерационным процессом (3.34), можно получить равномерную сходимость приближений  $\tilde{f}_n$  к решению  $f$  при  $0 \leq t < +\infty$ , полагая

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n+1}(\cdot, t) &= R_{f^{(0)}}^{l_n}(f_0), \quad 0 \leq t \leq n+1, \\ \tilde{f}(\cdot, t), t &> n+1, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где неотрицательные целые величины  $l_n$  определяются из условия

$$\max \left\{ 2r \min \frac{[K(r)t]^{l_n}}{l_n!}, 1 \right\} \leq \sup_{t \geq n+1} \|f(\cdot, t) - \tilde{f}(\cdot, t)\|_\mu.$$

В этом случае уклонение приближения  $\tilde{f}_n$  от решения  $f$  задачи (3.32), (3.33) оценивается сверху величиной

$$\alpha_n = \sup_{t \geq n} \|\tilde{f}(\cdot, t) - f(\cdot, t)\|_\mu.$$

Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f(\cdot, t) - \tilde{f}(\cdot, t)\|_\mu = 0,$$

то справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

и, следовательно, приближения  $\tilde{f}_n$  равномерно сходятся к функции  $f$  при  $t \in \mathbb{R}_1^+$ .

Отметим, что для решений пространственно однородного уравнения Больцмана асимптотикой является максвелловское распределение [23, 88, 177, 178, 179], а для решений уравнения коагуляции — распределение  $f = 0$  ([31, 32]).

## § 12. РЕГУЛЯРИЗУЕМЫЕ ЗАДАЧИ

Перейдем к построению итерационного процесса решения задачи Коши (3.32), (3.33) в случае, когда для оператора  $S$  нарушаются условия гладкости, сформулированные в теореме 3.6.

Рассмотрим оператор

$$S: L_1^+(\mu) \rightarrow L_1^+(\nu),$$

предполагая выполненным включение  $L_1^+(\mu) \subset L_1^+(\nu)$ , а также считаем, что для оператора  $S$  выполняется соотношение сохранения или диссипации относительно меры  $\nu$ .

**Определение 3.8.** Назовем задачу Коши (3.32), (3.33) с оператором  $S: L_1^+(\mu) \rightarrow L_1^+(\nu)$  *регуляризуемой*, если существует последовательность операторов

$$S_n: L_1^+(\nu) \rightarrow L_1^+(\nu), \quad n \in \mathbb{N},$$

обладающих свойством сохранения или диссипации относительно меры  $\nu$ , таких, что

- 1) при каждом номере  $n \in \mathbb{N}$  для операторов  $S_n$  выполнены условия теоремы 3.6 на конусе  $L_1^+(\nu)$ ;
- 2) последовательность решений  $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  задачи

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= S_n(f), \quad t > 0, \\ f|_{t=0} &= f^{(0)} \in L_1^+(\mu), \end{aligned} \tag{3.37}$$

компактная в пространстве  $L_1^{(T)}(\nu)$  при любых  $f^{(0)}$ ,  $T > 0$ , причем каждая предельная точка этой последовательности является решением задачи Коши (3.32), (3.33) с оператором  $S$ .

Построение итерационного метода решения регуляризуемой задачи (3.32), (3.33) опирается на следующее утверждение [33].

**Лемма 3.6.** Пусть  $(U, \rho)$  — полное метрическое пространство, на котором действует последовательность равномерно сжимающих операторов

$$A_n: U \rightarrow U, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. постоянные сжатия для операторов  $A_n$  не превосходят величины  $0 \leq q < 1$ . Пусть последовательность неподвижных точек  $\bar{x}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , отображений  $A_n$  сходится к некоторой точке  $\bar{x} \in U$ . Тогда точка  $\bar{x}$  может быть найдена как предел итераций

$$x_{n+1} = A_{n+1}(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где начальная точка  $x_0 \in U$  выбирается произвольно.

**Замечание 3.16.** Достаточным условием сходимости точек  $\bar{x}_n$  является поточечная сходимость отображений  $A_n$  на  $U$ .

Действительно, это является непосредственным следствием того, что предел  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  является сжимающим отображением на пространстве  $(U, \rho)$  (так как по условию теоремы операторы  $A_n$  обладают общей постоянной сжатия  $0 \leq q < 1$ ). Обозначим неподвижную точку  $\bar{x} = A(\bar{x})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}, \bar{x}_n) &= \rho(A(\bar{x}), A_n(\bar{x}_n)) \leq \\ &\leq \rho(A(\bar{x}), A_n(\bar{x})) + \rho(A_n(\bar{x}), A_n(\bar{x}_n)) \leq \\ &\leq \varepsilon + q\rho(\bar{x}, \bar{x}_n) \end{aligned}$$

(последнее неравенство выполнено при достаточно больших значениях  $n$ ). Таким образом, для больших  $n$

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}_n) \leq \frac{\varepsilon}{1 - q},$$

что доказывает утверждение.

□ Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, \bar{x}) &\leq \rho(A_{n+1}(x_n), \bar{x}_{n+1}) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) = \\ &= \rho(A_{n+1}(x_n), A_{n+1}(\bar{x}_{n+1})) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

В силу равномерной сжатости отображений  $A_n$  имеем

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, \bar{x}) &\leq q\rho(x_n, \bar{x}_{n+1}) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) \leq \\ &\leq q\rho(x_n, \bar{x}) + (1 + q)\rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}). \end{aligned}$$

Выберем номер  $n$  достаточно большим, чтобы при  $m \geq 0$  для произвольного положительного  $\varepsilon$  выполнялись неравенства

$$(1 + q)\rho(x_{n+k}, \bar{x}) < \varepsilon.$$

Тогда для  $k \geq 1$  справедливо соотношение

$$\rho(x_{n+k}, \bar{x}) \leq q\rho(x_{n+k-1}, \bar{x}) + \varepsilon.$$

Индукцией по номеру  $k \geq 1$  устанавливаем, что

$$\rho(x_{n+k}, \bar{x}) \leq q^k \rho(x_n, \bar{x}) + \varepsilon(1 - q)^{-1}.$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , получаем, что  $\rho(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма доказана. ■

**Теорема 3.7.** Пусть регуляризуемая задача Коши (3.32), (3.33) с оператором  $S: L_1^+(\mu) \rightarrow L_1^+(\nu)$ , имеет единственное решение  $f$  с начальным значением

$$f|_{t=0} = f^{(0)} \in L_1^+(\mu).$$

Тогда это решение может быть получено как предел в норме  $\|\cdot\|_\nu^{(T)}$  следующих итераций:

$$f_{n+1} = R_n^{\lambda_n}(f_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.38)$$

где  $R_n$  — оператор (3.35), записанный при  $g = f^{(0)}$ ; показатель степени  $\lambda_n$  определяется из условия

$$\frac{[K_n(r)T]^{\lambda_n}}{\lambda_n!} \leq q < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.39)$$

в котором величина  $K_n(r)$  определяется для оператора  $S_n$  аналогично такой же постоянной  $K(r)$  в соотношении (3.36).

□ Условие (3.39) обеспечивает равностепенную сжатость отображений

$$R_n^{\lambda_n}: B_+^{(T)}(r) \rightarrow B_+^{(T)}(r)$$

в норме  $\|\cdot\|_\nu^{(T)}$ . Единственность решения задачи Коши (3.32), (3.33) обеспечивает сходимость неподвижных точек отображений  $R_n^{\lambda_n}$  к этому решению. Из леммы 3.6 следует сходимость итераций (3.38) к функции  $f$ . Теорема доказана. ■

Отметим, что условиям теоремы 3.7 удовлетворяют пространственно однородные задачи для уравнений Больцмана и Смолуховского, рассматривавшиеся в [30, 31, 88].

**§ 13. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ ВО ВЛОЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

В этом разделе выделяется класс операторов столкновений со свойством  $\mu$ -сохранения или диссипации, для которых итерации (3.34) сходятся к решению задачи (3.32), (3.33) в более сильных нормах, чем  $\|\cdot\|_\mu$ , что важно с вычислительной точки зрения [34, 48].

Рассмотрим цепочку вложенных пространств

$$L_1(\mu) = U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_n \supset \dots \tag{3.40}$$

таких, что нормы  $\|\cdot\|_{U_k}$ ,  $k \geq 0$ , определенные на пространствах  $U_k$ , удовлетворяют неравенствам

$$\|\cdot\|_\mu = \|\cdot\|_{U_0} \leq k_1 \|\cdot\|_{U_1} \leq \dots \leq k_n \|\cdot\|_{U_n} \leq \dots, \tag{3.41}$$

где  $k_n$  — положительные постоянные вложения. Положим

$$U_k^+ = U_k \cap L_1^+(\mu);$$

ограниченные шары в пространстве  $U_k^+$  обозначим

$$B^+(k, r) = \{f \in U_k^+ : \|f\|_{U_k} \leq r\};$$

относительный радиус  $r_{l,k}(r)$  шара  $B^+(k, r)$  в пространстве  $U_l$ ,  $l \leq k$ , определим соотношением

$$r_{l,k}(r) = \sup_{f \in B^+(k,r)} \|f\|_{U_l}.$$

Символом  $B_T^+(k, r)$  обозначим непрерывные отображения

$$t \mapsto f(\cdot, t) \in B^+(k, r), \quad 0 \leq t \leq T,$$

множество которых снабдим нормой

$$\|\cdot\|_{U_k}^{(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\cdot\|_{U_k}.$$

**Определение 3.9.** Пусть оператор

$$S: U_0^+ \rightarrow U_0$$

такой, что образ его сужения  $S|_{U_k^+}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , принадлежит пространству  $U_k$ . Назовем этот оператор *квазилинейным* на цепочке вложенных пространств (3.40), (3.41), если для каждого номера  $k \geq 0$  можно указать такую неотрицательную функцию  $\gamma_k(\rho)$ , неубывающую и ограниченную при  $0 \leq \rho < +\infty$ , что для  $r > 0$  выполняется неравенство

$$\sup_{f \in B^+(k+1,r)} \|S(f)\|_{U_{k+1}} \|f\|_{U_{k+1}}^{-1} \leq \gamma_k(r_{k,k+1}(r)).$$

**Теорема 3.8.** Пусть оператор

$$S: U_0^+ \rightarrow U_0$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.6 и является квазилинейным на цепочке вложенных пространств (3.40), (3.41). Предположим, что его сужение  $S|_{U_k^+}$  при  $k \geq 0$  является локально липшиц-непрерывным, т. е. на каждом шаре  $B^+(k, r)$  выполнено соотношение

$$\sup_{\varphi, \psi \in B^+(k, r)} \|S(\varphi) - S(\psi)\|_{U_k} \|\varphi - \psi\|_{U_k}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} L_k(r) < \infty.$$

Тогда задача Коши (3.40), (3.41) при начальной функции

$$f^{(0)} \in U_k^+, \quad k \geq 0,$$

имеет единственное решение  $f$ , которое при каждом  $t \geq 0$  принадлежит конусу  $U_k^+$ . Это решение можно получить как равномерный предел итераций (3.34), причем на любом отрезке времени  $0 \leq t \leq T$  справедлива оценка

$$\|f - f_n\|_{U_k}^{(T)} \leq \frac{m_k^n(T)}{n!}, \quad n \geq 0,$$

где ограниченная неотрицательная величина  $m_k(T)$  определяется локальной постоянной Липшица оператора  $S$  на шаре  $B^+(k, r)$ , содержащем начальную функцию  $f^{(0)}$  и начальное приближение  $f_0(\cdot, t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , а также длиной отрезка времени  $T$  и значением постоянной  $H$ , которая используется в итерациях (3.34).

Метод доказательства теоремы 3.8 в основном повторяет доказательство теоремы 3.6. Поэтому подробное доказательство ее проводить не будем, а укажем, что утверждение теоремы получается применением математической индукции по номеру итераций, а затем по номеру  $k$  оценок норм  $\|R_g^n(f)\|_{U_k}^{(T)}$  из следующей леммы.

**Лемма 3.7.** Пусть оператор  $S$  — квазилинейный на цепочке вложенных пространств (3.40), (3.41) и для каждой функции  $g \in B^+(k, r)$  справедливо неравенство

$$\sup_{f \in B^+(0, r)} \sup_{n \geq 0} \|R_g^n(f)\|_{U_0}^{(T)} < \infty, \quad r \geq 0.$$

Тогда для каждого  $k \in \mathbb{N}$  и любой функции  $g \in B^+(k, r)$  выполняются неравенства

$$\sup_{f \in B^+(k, r)} \sup_{n \geq 0} \|R_g^n(f)\|_{U_k}^{(T)} < \infty, \quad r \geq 0.$$



□ Отметим, что для функций

$$g \in B^+(k+1, r), \quad f \in B_{(T)}^+(k+1, r),$$

при  $0 \leq t \leq T$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|R_g^n(f)\|_{U_{k+1}}^{(T)} &\leq \exp(-Ht) \left\{ r + \tilde{\gamma}_k(r_{k,k+1}(r)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t \exp(H\tau) \|f(\cdot, \tau)\|_{U_{k+1}} d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где

$$\tilde{\gamma}_k(r_{k,k+1}(r)) = \gamma_k(r_{k,k+1}(r)) + H.$$

Рассмотрим последовательность значений норм  $\|R_g^n(f)\|_{U_k}^{(T)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Предположим, что при некотором  $k \geq 0$  выполнено неравенство

$$\sup_{f \in B^+(k,r)} \sup_{n \geq 0} \|R_g^n(f)\|_{U_k}^{(T)} = \rho < \infty.$$

Тогда из неравенства (3.42) получаем

$$\begin{aligned} \|R_g^n(f)(\cdot, t)\|_{U_{k+1}} &\leq r + \tilde{\gamma}_k(\rho) \int_0^t \|R_g^{n-1}(f)(\cdot, \tau)\|_{U_{k+1}} d\tau, \\ 0 \leq t \leq T, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\|R_g^n(f)(\cdot, t)\|_{U_{k+1}} \leq \exp(\tilde{\gamma}_k(\rho)t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Применяя математическую индукцию по номеру  $k \geq 0$ , устанавливаем утверждение леммы. Лемма доказана. ■

Проиллюстрируем утверждение теоремы 3.8 на примере уравнения Смолуховского (уравнение (3.10) с оператором столкновений (1.8)). Предположим что в этом уравнении ядро  $\Phi$  является симметричной, неотрицательной, ограниченной функцией на  $\mathbb{R}_2^+$  (условия теоремы существования и единственности Мелзака [245, 246]). Поскольку оператор столкновений Смолуховского (1.8) обладает  $dw$  свойством диссипации, то положим, что  $L_1(\mu) = U_0$  — пространство суммируемых функций на множестве  $\Omega = \mathbb{R}_1^+$ .

Рассмотрим цепочку вложенных нормированных пространств  $U_k$ ,  $k \geq 0$ , которые снабдим нормами

$$\|f\|_{U_k} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}_1^+} |f(\omega)| + \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^k) |f(\omega)| d\omega, \quad k \geq 0.$$

Для применения теоремы 3.8 отметим, что для  $\omega, \omega_1 \geq 0$  при  $k \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$(\omega + \omega_1) + \dots + (\omega + \omega_1)^k \leq \omega^k + \omega_1^k + A(k)(\omega + \omega^2 + \dots + \omega^{k-1})(\omega_1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^{k-1}), \quad (3.43)$$

где  $A(k)$  — натуральное число. Для оператора Смолуховского (1.8) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_1^+} (\omega + \omega^2 + \dots + \omega^k) |S(f)(\omega)| d\omega \leq \\ & \leq \frac{3}{2} c A(k) \int_{\mathbb{R}_1^+} (\omega + \omega^2 + \dots + \omega^{k-1}) |f(\omega)| d\omega \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}_1^+} (\omega_1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^k) |f(\omega_1)| d\omega_1, \quad k \geq 0, c = \|\Phi\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Положим

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\omega \Phi(\omega - \omega', \omega') f^{(\omega - \omega')} g^{(\omega')} d\omega' - \right. \\ \left. - f^{(\omega)} \int_0^\infty \Phi(\omega, \omega') g^{(\omega')} d\omega' - g^{(\omega)} \int_0^\infty \Phi(\omega, \omega') f^{(\omega')} d\omega' \right\}, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+, \end{aligned}$$

Очевидно,  $S(f) = [f, f]_\Phi$ . При  $k = 0$  имеем оценки

$$\begin{aligned} & \sup_{\omega \in \mathbb{R}_1^+} |[f, g]_\Phi(\omega)| \leq \\ & \leq \frac{3}{4} c \left\{ \sup_{\omega \in \mathbb{R}_1^+} |f(\omega)| \int_{\mathbb{R}_1^+} |g(\omega)| d\omega + \sup_{\omega \in \mathbb{R}_1^+} |g(\omega)| \int_{\mathbb{R}_1^+} |f(\omega)| d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Сочетая оценки (3.44) и (3.45), получаем неравенство

$$\|S(f)\|_{U_k} \leq A_1 \|f\|_{U_{k-1}} \|f\|_{U_k}, \quad k \geq 1,$$

где постоянная  $A_1 = (3/2)A(k)$ . Следовательно, выполняется соотношение

$$\sup_{B^+(k+1, r)} \|S(f)\|_{U_{k+1}} \|f\|_{U_{k+1}}^{-1} \leq A_1 \sup_{B^+(k+1, r)} \|f\|_{U_k} = A_1 r_{k, k+1}(r),$$

$$k \geq 0,$$

и, значит, оператор Смолуховского (1.8) с ограниченным ядром  $\Phi$  — квазилинейный на цепочке пространств  $U_k$ .

Усилим оценку (3.45):

$$\|[f, g]_{\Phi}\|_{U_k} \leq A_1 \|f\|_{U_k} \|g\|_{U_k}, \quad k \geq 0. \quad (3.46)$$

Поскольку справедливо тождество

$$[f, f]_{\Phi} - [g, g]_{\Phi} = [f - g, f + g]_{\Phi},$$

то из (3.46) получаем оценку

$$\|S(f) - S(g)\|_{U_k} \leq A_1 (\|f\|_{U_k} + \|g\|_{U_k}) \|f - g\|_{U_k}, \quad k \geq 0,$$

т. е. оператор столкновений Смолуховского (1.8) при сделанных предположениях о ядре слияний частиц  $\Phi$  локально липшиц-непрерывный. Следовательно, для уравнения Смолуховского в этом случае выполняются условия теоремы 3.8 и оно имеет решение в каждом конусе  $U_k^+$  при  $t \geq 0$ , если этому конусу принадлежит начальная функция. Указанное решение можно получить как предел итераций (3.34) в норме  $\|\cdot\|_{U_k}^{(T)}$ ,  $k \geq 0$ , при каждом положительном  $T$ .

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗА, ОБРАЗУЮЩЕГО КОНДЕНСИРОВАННУЮ СТРУКТУРУ

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе рассматривается модель разреженного газа, состоящего из одинаковых частиц, столкновения между которыми возможны лишь в том случае, когда векторы скоростей двух налетающих частиц ориентированы ортогонально друг другу. В этом случае выполняются законы сохранения импульса и кинетической энергии для пары сталкивающихся частиц. Покоящиеся частицы системы порождают структуру, которая является своеобразным «конденсатом» неподвижного вещества. Для описания динамики такого газа предложено кинетическое уравнение и выполнены вычислительные эксперименты, подтверждающие соответствие выбранной модели и прямого моделирования методом Монте-Карло процесса указанных столкновений. Приводится схема моделирования явления путем случайного розыгрыша (метод Монте-Карло). Тестируется сходимость результатов вычислительного эксперимента к точным решениям кинетического уравнения и решениям, полученным с помощью разностных схем.

В физике высоких энергий в последние годы особый интерес вызывает моделирование условий возникновения конденсированной материи. Такого рода задачи возникают в процессе математического моделирования массопереноса в ядерно-энергетических установках при наличии сталкивающихся потоков вещества. В частности, одним из важнейших направлений применения рассмотренных моделей для уравнений Власова—Лиувилля—Больцмана—Смолуховского с разрывными полями скоростей течения вещества является задача исследования процессов образования конденсированной материи в международном проекте физики высоких энергий CBM<sup>1)</sup> (Compressed Baryonic Matter) [197], получаемой при столкновении пучков частиц в ускорителе на тяжелых ионах. В физике высоких энергий эти исследования также связаны с исследованием фазо-

---

<sup>1)</sup> <http://www.gsi.de-documents-DOC-Feb-447-1.pdf.url>

вых переходов, ведущих к образованию конденсированной материи при лобовых столкновениях ядер в ускорителях тяжелых ионов.

Особый интерес вызывают фазовые переходы, которые, как ожидается, произойдут при высоких температурах и (или) высоких барионных плотностях. Эти фазы играли важную роль в ранней Вселенной и, возможно, существуют в ядрах нейтронных звезд [270].

В связи с указанными выше проблемами в этой главе исследуется специальная модель газа, частицы которого взаимодействуют по схеме, предложенной в работах [62, 63].

Особый интерес вызывает возможность имитационного моделирования динамики системы сталкивающихся частиц на основе метода Монте-Карло. Спецификой предложенной модели является образование конденсированной структуры, состоящей из частиц, неподвижных относительно центра масс системы частиц, которые не участвуют во взаимодействиях. Для рассматриваемой системы предложено кинетическое уравнение Больцмановского типа.

Вычислительный эксперимент демонстрирует сходимость результатов моделирования к аналитическим решениям и приближенным решениям, полученным с помощью разностных схем.

## § 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Эволюция физических систем, состоящих из статистически большого количества элементов, сталкивающихся в процессе движения, в некотором смысле, локально, моделируется обобщенным пространственно неоднородным кинетическим уравнением Больцмана, рассмотренным в гл. 2, 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(v, x, t) + \operatorname{div}_x(vf(v, x, t)) &= S^{(v)}(f(\cdot, x, t)), \\ v \in \mathbb{R}_n, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где подлежащая отысканию одночастичная функция распределения  $f$  характеризует среднее количество частиц в момент времени  $t \geq 0$  в точках, принадлежащих элементу фазового пространства

$$dx \times dv \in \Omega = \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n.$$

Величины  $v \in \mathbb{R}_n$  определяют скорость движения частиц физической системы между столкновениями, т. е. скорость свободного переноса, оператор  $S$  — оператор столкновений. Если фазовое пространство частиц  $\Omega$  не содержит пространственных координат, т. е. одночастичная функция распределения  $f$  не зависит от  $x$ , то

кинетическое уравнение (4.1) становится пространственно однородным:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v, t) = S^{(v)}(f(\cdot, t)). \quad (4.2)$$

При построении математической модели процесса соударений частиц на систему налагают следующие предположения физического характера [60, 61]:

1. Все частицы системы имеют одинаковые массы  $m > 0$ .
2. В столкновениях участвуют только пары частиц, имеющих ортогонально направленные скорости в системе отсчета центра масс множества частиц, рассматриваемого в рамках модели.
3. При столкновениях выполняется закон сохранения импульса и кинетической энергии.

Таким образом, в силу законов сохранения скорости сталкивающихся частиц  $v \in \mathbb{R}_n$  и  $u \in \mathbb{R}_n$  в предлагаемой модели преобразуются по следующему закону:

$$\begin{cases} v' = v + u, \\ u' = 0, \\ (v, u)_{\mathbb{R}_n} = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

где символ «штрих» относится к скоростям частиц после столкновения. Величина

$$(v, u)_{\mathbb{R}_n} = \sum_{k=1}^n v_k u_k$$

— декартово скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}_n$ . Таким образом, в процессе такого столкновения обязательно образуется покоящаяся частица, которая, по существу, выбывает из последующих взаимодействий, ибо в данной модели при столкновении с такой частицей происходит обмен импульсами.

Основываясь на физических соотношениях баланса количества частиц в элементе фазового объема в соответствии с рассуждениями Л. Больцмана [16, 179] и Т. Карлемана [88], примененными при получении кинетического уравнения теории газов, запишем кинетическое уравнение (4.1) для рассматриваемого случая. Для простоты сначала рассуждения проведем в пространственно однородном случае для дискретного фазового пространства  $\Omega$ , позволяющем выявить структуру оператора столкновений. А затем распространим рассуждения на непрерывное фазовое множество, включая пространственно неоднородную модель.

### § 3. ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ. ДИСКРЕТНОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим фазовое пространство  $\Omega$ , состоящее из счетного набора векторов

$$\Omega = \{v^1, v^2, \dots, v^n, \dots\} \subset \mathbb{R}_n$$

таких, что для каждой пары ортогональных векторов  $v^i, v^j$ , принадлежащих  $\Omega$ , их сумма  $v^i + v^j$  тоже принадлежит  $\Omega$ . Кроме того, предположим, что вектор  $0 \in \Omega$ . Таким образом, отображение (4.3) преобразует скорости каждой пары сталкивающихся частиц из множества  $\Omega$  во множество  $\Omega$ . Предположим, что со скоростью  $v_i$  в момент времени  $t$  в системе имеется  $N(v^i, t) \in \mathbb{Z}^+$  частиц. Очевидно, что закон столкновений (4.3) оставляет количество частиц в системе неизменным. Поэтому для всех значений времени  $t$  справедливо тождество

$$\sum_i N(v^i, t) \equiv N,$$

где  $N$  — число частиц в системе. Положим, что  $N \gg 1$  и определим величину

$$f_N(v^i, t) = \frac{N(v^i, t)}{N}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим среднее изменение количества частиц  $\Delta N(v^i, t)$  в рассматриваемом элементе фазового пространства  $v^i \in \Omega$  за промежуток времени  $\Delta t > 0$ . Очевидно,

$$\Delta N(v^i, t) \approx N[f_N(v^i, t + \Delta t) - f_N(v^i, t)]. \quad (4.5)$$

Это изменение порождено двумя явлениями. Во-первых, в элемент  $v^i \in \Omega$  поступали частицы, приобретающие скорость  $v^i$  за счет парных столкновений частиц, имеющих скорости  $v^i - v^j$  и  $v^j$  такие, что

$$(v^i - v^j, v^j)_{\mathbb{R}_n} = 0.$$

Этот процесс назовем «рождением» частиц. Вклад процесса рождения в величину  $\Delta N$  обозначим  $\Delta N^+$ . Во-вторых, из рассматриваемого состояния исчезают частицы за счет парных столкновений с частицами системы, находящимися в других состояниях. Этот процесс назовем «гибелью» частиц и его вклад обозначим  $\Delta N^-$ . Таким образом, баланс изменения количества частиц равен

$$\Delta N = \Delta N^+ - \Delta N^-.$$

Предположим, что вероятность столкновения пары частиц, имеющих скорости  $v^i$  и  $v^j$ , имеет вид

$$P(v^i, v^j, \Delta t) = \Delta t N^{-1} \Phi(v^i, v^j) \bar{\delta}_{0, (v^i, v^j)_{\mathbb{R}_n}} \leq 1, \quad (4.6)$$

где  $\bar{\delta}_{a,b}$  — символ Кронекера, выделяющий в формуле (4.6) только ортогональные пары скоростей; функция  $\Phi(v, u) = \Phi(u, v) \geq 0$  — заданная интенсивность столкновений. Вычислим вклады рождения и гибели частиц, исходя из гипотезы Больцмана о «хаосе» [88, 178, 179]. Это означает, что среднее число появившихся частиц со скоростью  $v^i \neq 0$  за время  $\Delta t$  определяется суммой актов рождения таких частиц при столкновениях всех возможных пар частиц, имеющих скорости  $v^k$  и  $v^l$ :

$$\Delta N^+(v^i, t) \approx \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,l: v^k+v^l=v^i \\ v^k, v^l \neq 0}} P(v^k, v^l, \Delta t) N(v^k, t) N(v^l, t), \quad (4.7)$$

$$v^i \neq 0.$$

Коэффициент  $\frac{1}{2}$  в этой формуле связан с тем, что в сумме каждая пара частиц участвует дважды. Очевидно, формула (4.7) преобразуется к виду

$$\Delta N^+(v^i, t) \approx \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} P(v^i - v^k, v^k, \Delta t) N(v^i - v^k, t) N(v^k, t), \quad (4.8)$$

$$v^i \neq 0.$$

Вычислим теперь величину  $\Delta N^-(v^i, t)$  при значении скорости  $v^i \neq 0$ , пользуясь аналогичными соображениями. В результате получаем

$$\Delta N^-(v^i, t) \approx \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} P(v^k, v^i, \Delta t) N(v^k, t) N(v^i, t), \quad (4.9)$$

$$v^i \neq 0.$$

Сочетая соотношения (4.5), (4.8), (4.9), получаем

$$\begin{aligned} & N[f_N(v^i, t + \Delta t) - f_N(v^i, t)] \approx \\ & \approx \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} P(v^i - v^k, v^k, \Delta t) N(v^i - v^k, t) N(v^k, t) - \\ & - \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} P(v^k, v^i, \Delta t) N(v^k, t) N(v^i, t), \end{aligned}$$

$$v^i \neq 0,$$



и с учетом условий (4.4), (4.6), имеем

$$\begin{aligned}
 & f_N(v^i, t + \Delta t) - f_N(v^i, t) \approx \\
 & \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \Phi(v^i - v^k, v^k) \bar{\delta}_{0, (v^i - v^k, v^k)_{\mathbb{R}^n}} f_N(v^i - v^k, t) f_N(v^k, t) - \right. \\
 & \left. - \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \Phi(v^k, v^i) \bar{\delta}_{0, (v^i, v^k)_{\mathbb{R}^n}} f_N(v^k, t) f_N(v^i, t) \right\}, \\
 & v^i \neq 0.
 \end{aligned}$$

Формальным предельным переходом в этом выражении в предположении, что существуют пределы

$$\begin{aligned}
 & f_N(v^i, t) \rightarrow f(v^i, t), \\
 & \frac{f_N(v^i, t + \Delta t) - f_N(v^i, t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(v^i, t),
 \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем для функции  $f$  уравнение

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} f(v^i, t) = \\
 & \frac{1}{2} = \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \Phi(v^i - v^k, v^k) \bar{\delta}_{0, (v^i - v^k, v^k)_{\mathbb{R}^n}} f(v^i - v^k, t) f(v^k, t) - \\
 & - \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \Phi(v^k, v^i) \bar{\delta}_{0, (v^i, v^k)_{\mathbb{R}^n}} f(v^k, t) f(v^i, t), \\
 & \forall v^i \in \Omega: v^i \neq 0.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Рассмотрим теперь отдельно точку  $v = 0$ . Каждая сталкивающаяся пара частиц по закону (4.3) порождает покоящуюся частицу. Число частиц, которые за промежуток времени  $\Delta t$  переходят в состояние со скоростью  $v = 0$ , определяется суммой по всем парам частиц:

$$\Delta N^+(0, t) \approx \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \sum_{v^l \in \Omega \setminus 0} P(v^k, v^l, \Delta t) N(v^k, t) N(v^l, t).$$

В то же время в силу закона столкновений (4.3) значение  $\Delta N^-(v^i, t)$  равно 0. Следовательно, на основании предположении о хаосе в системе получаем соотношение

$$\Delta N(0, t) \approx \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \sum_{v^l \in \Omega \setminus 0} P(v^k, v^l, \Delta t) N(v^k, t) N(v^l, t).$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения о предельном переходе  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , и учитывая соотношения (4.4)–(4.6), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(0, t) = \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \sum_{v^i \in \Omega \setminus 0} \Phi(v^k, v^i) \bar{\delta}_{0, (v^i, v^k)_{\mathbb{R}_n}} f(v^k, t) f(v^i, t). \quad (4.11)$$

Таким образом, формулы (4.10) и (4.11) задают искомое пространственно однородное кинетическое уравнение вида (4.2). Оператор столкновений  $S$  в данном случае определяется правыми частями уравнений (4.10), (4.11). Таким образом,

$$\begin{aligned} S_{\Omega}^{(v)}(f) &= \bar{\delta}_{0, v} \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \sum_{v^i \in \Omega \setminus 0} \Phi(v^k, v^i) \bar{\delta}_{0, (v^i, v^k)_{\mathbb{R}_n}} f(v^k) f(v^i) + \\ &+ (1 - \bar{\delta}_{0, v}) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \Phi(v - v^k, v^k) \bar{\delta}_{0, (v - v^k, v^k)_{\mathbb{R}_n}} f(v - v^k) f(v^k) - \right. \\ &\left. - \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \Phi(v, v^k) \bar{\delta}_{0, (v, v^k)_{\mathbb{R}_n}} f(v^k) f(v) \right\}, \quad \forall v \in \Omega. \quad (4.12) \end{aligned}$$

**Замечание 4.1.** Суммы в правой части формулы (4.12) являются разновидностью преобразования Радона [253].

Отметим, что кинетическое уравнение (4.10), (4.12) является разновидностью дискретных уравнений Больцмана [23].

**Теорема 4.1.** Пусть функция  $f$  достаточно быстро стремится к нулю, когда  $v^2 \rightarrow \infty$ , а функция  $\Phi$  локально ограничена на пространстве  $\mathbb{R}_{2n}$ . Тогда для локально ограниченной на множестве  $\mathbb{R}_n$  функции  $\varphi(v)$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in \Omega} \varphi(v) S^{(v)}(f) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v^k \in \Omega \setminus 0} \sum_{v^i \in \Omega \setminus 0} [\varphi(0) + \varphi(v^k + v^i) - \varphi(v^k) - \varphi(v^i)] \times \\ &\quad \times \Phi(v^k, v^i) \bar{\delta}_{0, (v^i, v^k)_{\mathbb{R}_n}} f(v^k, t) f(v^i, t). \quad (4.13) \end{aligned}$$

Следовательно, оператор столкновений (4.12) имеет сумматорные инварианты

$$\varphi(v) = 1, \quad \varphi(v) = v, \quad \varphi(v) = v^2,$$

соответственно, отвечающие законам сохранения массы, импульса и кинетической энергии:

$$\sum_{v \in \Omega} S^{(v)}(f) = 0, \quad \sum_{v \in \Omega} v S^{(v)}(f) = 0, \quad \sum_{v \in \Omega} v^2 S^{(v)}(f) = 0. \quad (4.14)$$

Доказательство этого утверждения получается прямым вычислением вышеуказанных сумм с учетом закона столкновений (4.3) и требования симметричности интенсивности столкновений

$$\Phi(v, u) = \Phi(u, v) \geq 0.$$

Для отыскания вида оператора столкновений в случае фазового пространства  $\Omega = \mathbb{R}_n$  удобно использовать слабый предельный переход в выражении (4.13) по последовательности дискретных мер  $f^{(h)}(dv)$ , сосредоточенных на дискретных фазовых пространствах  $\Omega_h \subset \mathbb{R}_n$ , слабо сходящихся к абсолютно непрерывной мере. Положим в формуле (4.13) фазовое пространство  $\Omega = \Omega_h$ . Пусть задана непрерывная функция  $f(v)$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}_n$ . Определим набор величин  $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$  в формуле (4.13), полагая

$$f_i = f(v_i)h_i, \quad h_i > 0.$$

Функции  $f$  сопоставим меру  $\mu_h(dv)$ , определенную на подмножествах в  $\mathbb{R}_n$  следующим образом:

$$f \mapsto \mu_h(dv) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v^i \in \Omega_h} f_i \delta_{v^i}(dv), \quad (4.15)$$

где  $\delta_{v^i}$  — мера Дирака на фазовом пространстве  $\mathbb{R}_n$ , сосредоточенная в точке  $v_i \in \Omega_h$ . Параметр  $h$  — это набор положительных коэффициентов  $h = \{h_1, h_2, \dots, h_n, \dots\}$ , выбор которых свяжем ниже со свойствами слабой сходимости мер (4.15) к абсолютно непрерывной мере

$$\mu^{(f)}(dv) = f(v) dv.$$

При помощи формулы (4.13) определим меру — оператор столкновений  $S^{(dv)}$  на мерах вида (4.15). С учетом соотношения (4.15) выражение (4.13) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_n} \varphi(v) S^{(dv)}(\mu_h(dv)) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\{\mathbb{R}_n \setminus 0\} \times \{\mathbb{R}_n \setminus 0\}} [\varphi(0) + \varphi(v + v_1) - \varphi(v) - \varphi(v_1)] \times \\ & \quad \times \Phi(v, v_1) \bar{\delta}_{0, (v, v_1)_{\mathbb{R}_n}} \mu_h(dv) \otimes \mu_h(dv_1). \end{aligned} \quad (4.16)$$

На декартовом произведении  $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n$  рассмотрим  $(2n - 1)$ -мерное многообразие Радона

$$\begin{aligned} & \mathfrak{R}_{2n-1} = \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}_{2n} : (u, v)_{\mathbb{R}_n} = 0, u \neq 0, v \neq 0, u \in \mathbb{R}_n, v \in \mathbb{R}_n\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Тогда интеграл в правой части равенства (4.16) преобразуется в интеграл по многообразию Радона (4.17):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_n} \varphi(v) S^{(dv)}(\mu_h(dv)) = \\ & = \frac{1}{2} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}_{2n-1}} \Phi(v, v_1) \mu_h(dv) \otimes \mu_h(dv_1) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_{2n-1}} [\varphi(v + v_1) - \varphi(v) - \varphi(v_1)] \Phi(v, v_1) \mu_h(dv) \otimes \mu_h(dv_1). \end{aligned} \quad (4.18)$$

#### § 4. ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО $\Omega = \mathbb{R}_n$

Формула (4.18) является ключевой для получения вида оператора столкновений  $S$  в случае непрерывных переменных  $v \in \mathbb{R}_n$ .

Пусть рассматривается последовательность дискретных фазовых пространств  $\Omega_h$ . Предположим, что последовательность мер (4.15)  $\mu_h(dv)$  слабо сходится на некоторой последовательности параметров  $h \rightarrow 0$  к мере  $\mu^{(f)}(dv)$ , абсолютно непрерывной относительно меры Лебега  $dv$  на пространстве  $\mathbb{R}_n$ . Слабую сходимость мер будем обозначать символом

$$\mu_h(dv) \xrightarrow{weak} \mu^{(f)}(dv).$$

Это по определению означает, что для каждой финитной непрерывной функции

$$\varphi \in \mathring{C}(\mathbb{R}_n)$$

справедливо соотношение

$$\int_{\mathbb{R}_n} \varphi(v) \mu_h(dv) \rightarrow \int_{\mathbb{R}_n} \varphi(v) f(v) dv$$

на некоторой последовательности параметров  $h$ .

**Теорема 4.2.** Пусть последовательность мер

$$\mu_h(dv) \xrightarrow{weak} \mu^{(f)}(dv), \quad h \rightarrow 0,$$

где  $f \in \mathring{C}(\mathbb{R}_n)$ . Предположим, что функция  $\Phi(v, v_1)$  является непрерывной на  $\mathbb{R}_{2n}$ . Тогда после предельного перехода по  $h \rightarrow 0$

соотношение (4.16) преобразуется в выражение

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_n} \varphi(v) S^{(dv)}(\mu_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_n} \varphi(v) S^{(dv)}(\mu^{(f)}) = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(0) \int_{\mathfrak{R}_{2n-1}} \Phi(v, v_1) f(v, t) f(v_1, t) dv \otimes dv_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}_{2n-1}} [\varphi(v + v_1) - \varphi(v) - \varphi(v_1)] \Phi(v, v_1) f(v, t) f(v_1, t) dv \otimes dv_1, \end{aligned}$$

и, следовательно, оператор столкновений  $S^{(dv)}(\mu^{(f)})$ , значение которого для краткости далее будем обозначать как  $S^{(dv)}(f)$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S^{(dv)}(f) &= \delta_0(dv) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \int_{\{\mathbb{R}_n \setminus 0\} \times \{\mathbb{R}_n \setminus 0\}} \Phi(v, v_1) f(v) f(v_1) \delta_0(\cos(\widehat{v, v_1})) dv dv_1 \right\} + \\ &+ dv \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n \setminus 0} \Phi(v - v_1, v_1) f(v, t) f(v_1, t) \delta_0(\cos(\widehat{v - v_1, v_1})) dv_1 - \right. \\ &\left. - \int_{\mathbb{R}_n \setminus 0} \Phi(v, v_1) f(v, t) f(v_1, t) \delta_0(\cos(\widehat{v, v_1})) dv_1 \right\}. \quad (4.19) \end{aligned}$$

Доказательство теоремы получается прямым вычислением пределов с учетом ортогональности скоростей пар сталкивающихся частиц.

**Замечание 4.2.** В теореме 4.2 требование финитности  $f \in \mathring{C}(\mathbb{R}_n)$  можно заменить на условие достаточно быстрого стремления функции  $f(v) \rightarrow 0$  при  $v^2 \rightarrow \infty$ .

**Замечание 4.3.** Оператор столкновений (4.19), соответствующий закону взаимодействия частиц (4.3), состоит из двух компонент — сингулярной (первое слагаемое в формуле (4.19)), задаваемой атомарной мерой Дирака  $\delta_0(dv)$ , сосредоточенной на покоящихся частицах, и абсолютно непрерывной, задаваемой вторым слагаемым в соотношении (4.19) с мерой Лебега  $dv$ . Сингулярная компонента описывает образование конденсированного вещества, состоящего из совокупности покоящихся частиц.

**Замечание 4.4.** Структура абсолютно непрерывной компоненты оператора столкновений (4.19) аналогична оператору столкновений кинетической теории коагуляции, разработанной М. Смолуховским [56, 150,

259, 260]. Таким образом, оператор (4.19) можно трактовать как описание процесса коагуляции импульсов и кинетической энергии при ортогональных соударениях частиц (4.3) (абсолютно непрерывная компонента), и процесс выделения покоящегося вещества — сингулярная компонента, которая в теории коагуляции отождествляется с осадками или образованием геля, выделяющегося из дисперсной системы.

**Замечание 4.5.** В силу наличия сингулярной компоненты у оператора столкновений на абсолютно непрерывных распределениях частиц решения уравнений (4.1), (4.2) также должны рассматриваться в классах мер, состоящих из сингулярной и абсолютно непрерывной части. При этом сингулярная часть решений уравнений (4.1), (4.2) сосредоточена на скорости  $v = 0$ . Таким образом, закон столкновений (4.3) приводит к необходимости рассмотрения функциональных решений уравнений физической кинетики [43, 52], теории которых посвящена гл. 2.

Примером решения уравнения (4.2) с фазовым пространством  $v \in \mathbb{R}_2$  с оператором столкновений (4.19) при интенсивности столкновений  $\Phi = 1$  является мера, состоящая из абсолютно непрерывной компоненты с нестационарным максвелловским распределением и атомарной меры, эволюционирующей при  $t \rightarrow +\infty$  к мере Дирака  $\delta_0(dv)$ :

$$f(dv, t) = \frac{1}{\pi \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)^2} \exp\left(-\frac{v^2}{1 + \frac{t}{2\pi}}\right) dv + \frac{t}{2\pi + t} \delta_0(dv).$$

Справедливость этого соотношения устанавливается прямой постановкой его в соотношения (4.2) и (4.19). Приведенная формула описывает «перекачку» вещества из подвижной компоненты газа в неподвижную. Она является примером функционального решения задачи Коши для уравнения (4.2), (4.19) при непрерывных начальных данных (распределение Максвелла) [52]. Очевидно, что для этого решения выполняются законы сохранения массы, средний импульс равен нулю, сохраняется средняя кинетическая энергия. Масса вещества в подвижной компоненте (совпадающая с вероятностью обнаружения частицы в подвижной компоненте) равна

$$\rho(t) = \frac{1}{1 + \frac{t}{2\pi}};$$

полная масса неподвижной компоненты (вероятность обнаружения частицы в неподвижной компоненте) равна  $t/(2\pi + t)$ ; температура неподвижной компоненты равна нулю. При этом температура газа  $T^\circ(t)$  сосредоточена в подвижной компоненте и растет с течением

времени по закону

$$T^\circ(t) \sim 1 + \frac{t}{2\pi}.$$

Выполняется уравнение состояния идеального газа (закон Клапейрона—Менделеева)  $P \sim \rho T^\circ$ . На приведенном решении давление  $P \equiv \text{const}$ .

### § 5. ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ

Пространственно неоднородное кинетическое уравнение для модели ортогональных столкновений (4.3) получается подстановкой операторов (4.12), (4.19) в обобщенное уравнение Больцмана (4.1). В соответствии с замечанием 4.3 в случае пространственно неоднородной динамики (4.1) образуется пространственная структура, состоящая из неподвижного вещества в системе отсчета, связанной с центром масс газа. Отметим, что характер столкновений частиц (4.3) означает, что с течением времени движущиеся частицы в основном переходят в состояние покоя. То есть в общем случае, когда интенсивность столкновений  $\Phi \geq \text{const} > 0$ , асимптотикой распределения частиц по скорости при  $t \rightarrow +\infty$  является атомарная мера Дирака  $\delta_0(dv)$ , сосредоточенная на значении скорости  $v = 0$ . С этой точки зрения представляет интерес исследование поведения макроскопических переменных в рассмотренной модели газа. В частности, из-за постоянно возникающей покоящейся массы частиц в силу закона (4.3) макроскопическое (гидродинамическое) состояние такого газа естественно рассматривать как бинарную смесь покоящегося конденсата и скользящей в нем подвижной компоненты. Полная масса покоящегося вещества монотонно возрастает с течением времени, а его кинетическая энергия и импульс обращаются в нуль. Соответственно, в силу закона сохранения энергии температура подвижной компоненты должна увеличиваться с течением времени.

### § 6. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ (4.2), (4.12)

Для тестирования модели в рамках вычислительного эксперимента рассмотрим пространственно однородную задачу, описываемую уравнением (4.2) с дискретным оператором столкновений (4.12). Положим, что дискретное множество скоростей  $\Omega$  лежит в плоскости  $\mathbb{R}_2$ . Пусть в столкновениях участвовали только те пары частиц, у которых ортогональные направления движения и одинаковые значения кинетической энергией  $E_k = 2^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . (Величина кинетической энергии частицы массы  $m$  равна  $(1/2)mv^2$ .) Для

удобства вычислений потребуем, чтобы значение массы частицы  $m$  было равно 2. На каждом энергетическом уровне  $E_k$  выделим две пары взаимно ортогональных направлений, задаваемых единичными векторами

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0), \\ e_2 = (0, 1), \end{cases} \quad \begin{cases} e_3 = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}, \\ e_4 = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Интенсивность столкновений частиц определим формулой

$$\Phi(v_1, v_2) = d_k, \quad d_k \geq 0,$$

если значения скоростей пары сталкивающихся частиц принимают значения

$$v_{1,k}^\pm = \pm\sqrt{E_k}e_1 \quad \text{и} \quad v_{1,k}^\pm = \pm\sqrt{E_k}e_2,$$

либо

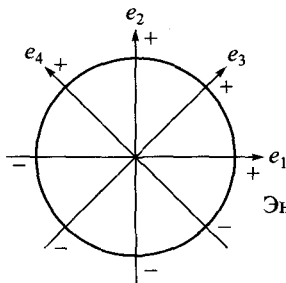
$$v_{1,k}^\pm = \pm\sqrt{E_k}e_3 \quad \text{и} \quad v_{1,k}^\pm = \pm\sqrt{E_k}e_4.$$

В остальных случаях положим значения  $\Phi(v_1, v_2) = 0$ . Зададим величину  $d_0 = 0$ ,  $E_0 = 0$ . Таким образом, на каждом энергетическом уровне  $E_k$  ( $k \neq 0$ ) имеется восемь значений скорости (с учетом знака относительно выбранных четырех направлений), которые участвуют в парных столкновениях. Конфигурация расположения скоростей на плоскости изображена на рис. 4.1.

Примем следующие обозначения:

$$f_0 = f(0, t), \quad f_{i,k}^\pm = f(v_{i,k}^\pm, t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда в этих обозначениях с учетом указанных требований на функцию  $\Phi$ , пространственно однородное кинетическое уравне-



Энергетический уровень  $E_k$

Рис. 4.1. Диаграмма направления ортогональных пар скоростей сталкивающихся частиц



ние (4.2) принимает следующий вид (4.20), (4.21):

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} d_k [f_{1,k}^+ f_{2,k}^+ + f_{1,k}^+ f_{2,k}^- + f_{1,k}^- f_{2,k}^+ + f_{1,k}^- f_{2,k}^- + f_{3,k}^+ f_{4,k}^+ + f_{3,k}^+ f_{4,k}^- + f_{3,k}^- f_{4,k}^+ + f_{3,k}^- f_{4,k}^-], \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df_{1,k}^+}{dt} = d_{k-1} f_{3,k-1}^+ f_{4,k-1}^- - d_k f_{1,k}^+ [f_{2,k}^+ + f_{2,k}^-], \\ \frac{df_{1,k}^-}{dt} = d_{k-1} f_{3,k-1}^- f_{4,k-1}^+ - d_k f_{1,k}^- [f_{2,k}^+ + f_{2,k}^-], \\ \frac{df_{2,k}^+}{dt} = d_{k-1} f_{3,k-1}^+ f_{4,k-1}^- - d_k f_{2,k}^+ [f_{1,k}^+ + f_{1,k}^-], \\ \frac{df_{2,k}^-}{dt} = d_{k-1} f_{3,k-1}^- f_{4,k-1}^+ - d_k f_{2,k}^- [f_{1,k}^+ + f_{1,k}^-], \\ \frac{df_{3,k}^+}{dt} = d_{k-1} f_{1,k-1}^+ f_{2,k-1}^- - d_k f_{3,k}^+ [f_{4,k}^+ + f_{4,k}^-], \\ \frac{df_{3,k}^-}{dt} = d_{k-1} f_{1,k-1}^- f_{2,k-1}^+ - d_k f_{3,k}^- [f_{4,k}^+ + f_{4,k}^-], \\ \frac{df_{4,k}^+}{dt} = d_{k-1} f_{1,k-1}^- f_{2,k-1}^+ - d_k f_{4,k}^+ [f_{3,k}^+ + f_{3,k}^-], \\ \frac{df_{4,k}^-}{dt} = d_{k-1} f_{1,k-1}^+ f_{2,k-1}^- - d_k f_{4,k}^- [f_{3,k}^+ + f_{3,k}^-], \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$$k \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что при вычислении выражения в правой части уравнений (4.21) по формуле для оператора столкновений (4.12) сомножители, соответствующие парам ортогональных скоростей при величине  $d_{k-1}$ , учитываются дважды и потому коэффициент  $1/2$  исчезает в операторе рождения частиц в (4.21). Уравнение (4.20) описывает эволюцию неподвижных частиц — конденсированной фазы моделируемого газа. Отметим, что уравнения (4.21) отражают законы сохранения импульса и энергии при парных столкновениях, а уравнение (4.20) описывает накопление частиц в состоянии покоя, которые не испытывают никаких взаимодействий.

Выделим специальный класс решений системы уравнений (4.21) симметричных относительно направления движения частиц. Для этого примем, что решение системы (4.21) зависит только от энергетического уровня, т. е.

$$f_{i,k}^{\pm}(t) \equiv \varphi_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

Условием совместности системы (4.21) с видом решения (4.22) является следующее соотношение:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = d_{k-1}\varphi_{k-1}^2 - 2d_k\varphi_k^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.23)$$

Тогда концентрация газа  $n_k$  на энергетическом уровне  $E_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , вычисляется по формуле

$$n_k(t) = \sum_{i=1}^4 \left( f_{i,k}^+ + f_{i,k}^- \right) = 8\varphi_k(t).$$

Сочетая это выражение с (4.23) и (4.20), получаем следующие уравнения для концентраций частиц на энергетических уровнях:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2}d_{k-1}^*n_{k-1}^2 - d_k^*n_k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad d_k^* = \frac{1}{4}d_k, \quad (4.24)$$

$$\frac{dn_0}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} d_k^*n_k^2. \quad (4.25)$$

Отметим, что соотношения (4.24), (4.25) определяют закон сохранения полной кинетической энергии в системе:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_k n_k(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} E_k n_k(0),$$

если сходится ряд в правой части этого тождества и при условии сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k d_k^* n_k^2(t).$$

**Замечание 4.6.** Если на каждом энергетическом уровне размещается  $N^*$  пар не пересекающихся ортогональных направлений для столкновения частиц, то в формулах (4.24) величина  $d_k^*$  определяется соотношением  $d_k^* = \frac{1}{N^*} d_k$ . В рассмотренном примере  $N^* = 4$ .

Отметим, что система уравнений (4.24) является частным случаем уравнения Смолуховского:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} D_{k-i,i} n_{k-i} n_i - \sum_{i=1}^{\infty} D_{k,i} n_k n_i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.26)$$

для которого разработана подробная теория, см. [56]. Таким образом, модель ортогональных столкновений (4.3) самым тесным образом связана с теорией коагуляции Смолуховского. Уравнение Смолуховского (4.26) можно рассматривать как вариант модели (4.2), (4.12),

когда рассматриваются распределения частиц, зависящие только от кинетической энергии. При этом концентрации  $n_k(t)$  описывают вероятность обнаружения частицы на соответствующем энергетическом уровне.

Уравнение Смолуховского (4.21) для энергетического уровня  $E_1$  — это уравнение Бернулли; соответственно имеем аналитическое решение:

$$n_1(t) = \frac{n_1(0)}{1 + d_1^* n_1(0)t}, \quad t \geq 0. \quad (4.27)$$

Концентрации на последующих уровнях подчиняются рекуррентной последовательности уравнений Рикатти, которые имеют неотрицательное решение при всех  $t \geq 0$ , если начальные данные  $n_k(0)$  неотрицательные.

### § 7. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ (4.2), (4.12)

Для компьютерного моделирования процесса ортогональных столкновений частиц применен алгоритм повторных розыгрышей столкновений, разработанный в работе [62] и оказавшийся весьма эффективным для моделирования процессов коагуляции. В качестве теста использовался пример дискретной модели (4.2), (4.12), рассмотренный в предыдущем разделе. Одновременно проводилось сравнение значений концентраций частиц  $n_k(t)$  на энергетических уровнях  $E_k = 2^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , полученных методом имитационного моделирования столкновений частиц при условиях § 3 гл. 4, а также аналитическим решением (4.27) и разностным решением уравнений Рикатти (4.24) по схеме Эйлера.

**Алгоритм имитационного моделирования ортогональных столкновений на плоскости.** Частицы занумерованы натуральными числами  $1 \leq i \leq N$ ,  $N \geq 1$ . Каждому номеру  $i$  могут соответствовать величины скорости

$$v^i \in \{v^{l,k} = (v_1^{l,k}, v_2^{l,k})\} \in \mathbb{R}_2,$$

определенные в § 3 гл. 4, см. рис. 4.1. В каждый момент времени состояние системы задается количеством частиц, имеющих скорость  $v^{l,k}$ , соответствующую направлению  $e_l$  на энергетическом уровне  $E_k$ . Ниже для удобства каждый элемент  $v$  допустимого множества скоростей  $\{v^{l,k} = (v_1^{l,k}, v_2^{l,k})\}$  будем называть ячейкой  $D_v$ .

Пусть значения времени  $t$  принимают дискретные значения  $t_n = n\tau$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau > 0$ .

Частицы в момент времени  $t_n$  могут участвовать в парных взаимодействиях по закону ортогональных столкновений (4.3). Акты парных столкновений и изменение скоростей при столкновении разыгрываются следующим образом. Рассмотрим множество  $\Delta$ , состоящее из пар номеров частиц  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ . В каждый момент времени  $t_n$  разыгрываются независимые случайные величины  $\pi^{(s)}(t_n)$  со значениями в  $\Delta$ . При этом вероятность выбора пары

$$P \left\{ \pi^{(s)}(t_n) = (i, j) \right\} = \frac{1}{C_N^2}, \quad 1 \leq s \leq Q(N),$$

где величина  $Q(N)$  определяет количество повторных розыгрышей в данный момент времени. Возможные пары сталкивающихся частиц в момент времени  $t_n$  выберем как значения набора

$$\left\{ \pi^{(s)}(t_n) \right\}_{s=1}^{Q(N)},$$

накладывая дополнительное ограничение: если хотя бы один из номеров, входящих в пару  $\pi^{(s)}(t_n)$  при  $s \geq 2$ , входит в одну из пар

$$\pi^{(1)}(t_n), \dots, \pi^{(s-1)}(t_n),$$

то для пары  $\pi^{(s)}(t_n)$  закон преобразования скоростей (4.3) в момент времени  $t_n$  не происходит. Тем самым исключаются многократные взаимодействия для каждой частицы в момент времени  $t_n$ .

Возможность преобразования скоростей для выбранных вышеуказанным способом пар номеров сталкивающихся частиц определим розыгрышем совокупности независимых случайных величин  $\eta_{i,j}(t_n)$ ,  $(i, j) \in \Delta$ , принимающих два значения: 0 и 1. Значение 0 означает запрет преобразования скоростей, а 1 — наличие преобразования скоростей (4.3) для пары частиц с номерами  $(i, j)$  в момент времени  $t_n$ . Розыгрыш этих значений подчиним следующим правилам. Значения случайной величины  $\eta_{i,j}(t_n)$  задаются условной функцией распределения

$$P \{ \eta_{i,j}(t_n) = 1 \} = \Phi(v^i, v^j) \tau \leq 1,$$

$$P \{ \eta_{i,j}(t_n) = 0 \} = 1 - \Phi(v^i, v^j) \tau,$$

где  $0 \leq \Phi(v^i, v^j) = \Phi(v^j, v^i)$  — интенсивность передачи импульса в паре сталкивающихся частиц  $(i, j) \in \Delta$  с ортогональными скоростями  $v^i$  и  $v^j$ , заданная в § 3 гл. 4.

Если пара  $(i, j) \in \Delta$  выбрана, и значение  $\eta_{i,j}(t_n)$  равно 1, то значение ортогональных векторов скоростей для выбранной пары преобразуется по закону (4.3):

$$v^i(t_n) \mapsto \bar{v}^i(t_n) = v^i(t_n) + v^j(t_n),$$

$$v^j(t_n) \mapsto \bar{v}^j(t_n) = 0.$$

При этом значения скоростей остальных частиц в системе остаются неизменными. Если же  $\eta_{i,j}(t_n) = 0$ , то значения скоростей для всех частиц системы остаются неизменными. Указанная процедура выполняется для всех пар выбранных номеров последовательным перебором значений  $\pi^{(1)}(t_n), \dots, \pi^{(Q(N))}(t_n)$ .

Рассмотрим числа заполнения ячейки  $D_v$ :

$$N_v(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \bar{\delta}_{v, v^i(t_n)}.$$

Положим

$$u_{v,N}(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle N_v(t_n) \rangle}{N}, \quad (4.28)$$

— средняя концентрация частиц в ячейке  $D_v$  в момент времени  $t_n$  (средняя относительная доля частиц системы из  $N$  частиц, имеющих скорость  $v$  в момент времени  $t_n$ ). Среднее значение относится к независимым реализациям описанного алгоритма.

Обоснование сходимости этого алгоритма к решению системы (4.20), (4.21) при числе частиц  $N \rightarrow \infty$  полностью аналогично методам работ [58, 62] и рассматривается в гл. 5.

Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент времени все частицы системы помещены в ячейки энергетического уровня  $E_1$ . Предположим, что все восемь ячеек этого уровня заполнены одинаковым количеством частиц. В соответствии с формулами (4.24), (4.25) обозначим  $\hat{n}_{k,N}$  концентрацию частиц на энергетическом уровне  $E_k$ , которая получается суммированием концентраций (4.28) по скоростям  $v$ , для которых  $v^2 = E_k$ .

**Теорема 4.3.** Пусть интенсивность взаимодействия частиц

$$\Phi = d_k \geq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

определяемая требованиями § 3 гл. 4, такова, что значения  $d_k = 0$  при  $k > k_0$ . Предположим, что число повторных испытаний для выбора пары сталкивающихся частиц  $Q(N)$  подчиняется условию

$$\frac{Q(N)}{N} \rightarrow \infty$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Тогда средние концентрации  $\hat{n}_{k,N}(t_n)$  подчиняются разностной задаче

$$\begin{aligned} \hat{n}_{k,N}(t_{n+1}) = \hat{n}_{k,N}(t_n) + \tau \left[ \frac{1}{2} d_{k-1}^* \hat{n}_{k-1,N}^2(t_n) - d_k^* \hat{n}_{k,N}^2(t_n) \right] + \\ + \tau O(N^{-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\hat{n}_{1,N}(0) = 1, \quad \hat{n}_{k,N}(0) = 0, \quad k \neq 1, \quad (4.30)$$

аппроксимирующей систему уравнений Смолуховского (4.25), где оценка  $\mathcal{O}$  является равномерной относительно  $t_n$ .

Доказательство этого утверждения проведем в гл. 5 в более общем случае.

**Следствие 4.1.** При  $N \rightarrow \infty$  значения концентраций  $\hat{n}_{k,N}$  равномерно сходятся к решению разностной схемы Эйлера для системы (4.25). Поскольку при  $k_0 \rightarrow \infty$  решение уравнений (4.25) с финитной функцией  $d_k = \tilde{d}_k \theta(k_0 - k)$  (где  $\tilde{d}_k \geq 0$  не является финитной функцией) сходится к решению этой же системы с функцией взаимодействия частиц  $d_k \equiv \tilde{d}_k$ , то описанный в настоящем разделе алгоритм имитационного моделирования сходится к решению уравнений (4.20), (4.21) и, соответственно (4.24), (4.25) при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ,  $k_0 \rightarrow \infty$ .

**Вычислительный эксперимент.** В серии вычислений по приведенному алгоритму, выполненных для различного количества частиц  $N$ , удовлетворительные по устойчивости результаты получаются даже на одной истории вычислительного процесса при следующих порядках величин (дающих сопоставимые вклады в погрешность при сравнении имитационного, разностного и аналитического решения):

$$N \sim 2,5 \cdot 10^3, \quad N^* = 4, \quad d_k \sim 10, \quad \tau \sim 10^{-3},$$

при числе повторных розыгрышей  $Q(N) \sim 10^4$  взаимодействующей пары частиц в каждый момент времени  $t_n = n\tau$ , уровне «срезки» интенсивности взаимодействий частиц  $k_0 \sim 10$ . Расчеты проводились на отрезке изменения времени  $0 \leq t \leq T \sim 10$ . В процессе вычислений на всем отрезке изменения времени  $0 \leq t \leq T$  контролировались сохраняющиеся интегральные характеристики системы частиц: двумерный полный импульс и полная кинетическая энергия, нормированные на число частиц с точностью  $O(1/N)$ .

Для сравнительного анализа адекватности имитационного моделирования системе (4.20), (4.21) использовалось аналитическое решение для чисел заполнения первого энергетического уровня (4.27) и приближенное решение системы (4.24), (4.25) разностным методом Эйлера, определяемым формулой (4.29). Пример типичного сравнительного расчета для одной истории описанного вычислительного эксперимента приведен на рис. 4.2. В этом примере использовались следующие параметры моделирования:

$$N = 2.4 \cdot 10^3, \quad N^* = 4, \quad d_k = 10, \quad k \geq 1, \\ d_0 = 0, \quad k_0 = 10, \quad \tau = 10^{-3}, \quad Q(N) = 9.7 \cdot 10^3, \quad T = 8.$$

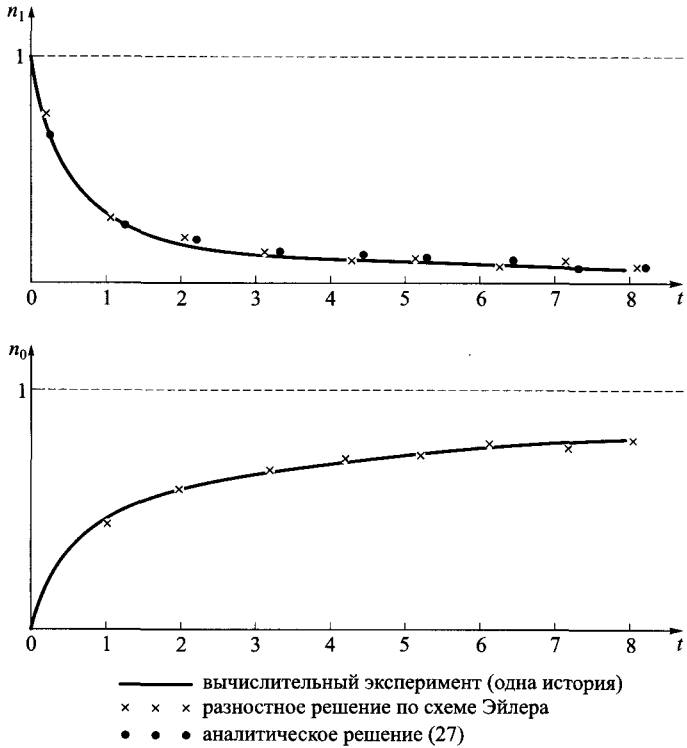


Рис. 4.2. Результаты компьютерного моделирования процесса ортогональных столкновений (графики концентраций  $n_1(t)$  и  $n_0(t)$ )

На каждом из восьми направлений движения в начальный момент времени загружалось по 300 частиц.

### § 8. ПЕРЕХОД ОТ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ К КИНЕТИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ СМОЛУХОВСКОГО

Рассмотрим сначала фазовое пространство, состоящее из дискретного множества скоростей. Пусть решение  $f(v^i, t)$  кинетического уравнения (4.2) с оператором столкновений (4.12) не зависит от направления скорости  $v^i$ . Таким образом, предполагается зависимость решения от скорости через величину

$$\|v^i\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v^i, v^i)_{\mathbb{R}^n}}.$$

Положим в формуле (4.13) функцию  $\varphi = \bar{\delta}_{E, v^2}$ . Тогда

$$\sum_{v \in \Omega} \bar{\delta}_{E, v^2} S^{(v)}(f) = \frac{1}{2} \sum_{v^j \in \Omega \setminus 0} \sum_{v^i \in \Omega \setminus 0} [1 + \bar{\delta}_{E, (v^j)^2 + (v^i)^2} - \bar{\delta}_{E, (v^j)^2} - \bar{\delta}_{E, (v^i)^2}] \times \Phi(v^k, v^i) \bar{\delta}_{0, (v^i, v^k)_{\mathbb{R}^n}} f(v^j, t) f(v^i, t). \quad (4.31)$$

Пусть одночастичное фазовое пространство  $\Omega$  представимо в виде объединения счетного упорядоченного множества энергетических уровней

$$\mathfrak{S}_k = \{v^i \in \Omega: \|v^i\|^2 = E_k\}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $E_k < E_{k+1}$ ,  $E_0 = 0$ . Будем предполагать, что каждый энергетический уровень состоит из непустого конечного множества точек. Обозначим

$$n_k(t) = \sum_{v^i \in \Omega} f(v^i, t) \bar{\delta}_{E_k, v^2}.$$

Положим  $\bar{f}(E_k, t) = f(v, t)$  при значениях аргумента  $v \in \mathfrak{S}_k$ . Тогда справедливы следующие равенства:

$$n_k(t) = \gamma_k \bar{f}(E_k, t), \quad \gamma_k = \sum_{v^i \in \mathfrak{S}_k} \bar{\delta}_{E_k, v^2}.$$

Очевидно, что  $n_k$  — концентрация частиц на энергетическом уровне  $E_k$ , а  $\gamma_k = \text{card } \Omega \cap \mathfrak{S}_k$  — это число направлений скоростей частиц на этом энергетическом уровне. Отметим, что в силу предположения о непустоте энергетических уровней имеем  $\gamma_k \geq 1$ . Пусть величина

$$\beta_{k,l} = \sum_{v^i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{v^j \in \mathfrak{S}_l} \bar{\delta}_{E_k, (v^i)^2} \bar{\delta}_{E_l, (v^j)^2} \bar{\delta}_{0, (v^i, v^j)_{\mathbb{R}^n}}$$

— это количество всех взаимно ортогональных пар скоростей  $\{v^i, v^j\}$  (с учетом кратности), принадлежащих паре энергетических уровней  $v^i \in \mathfrak{S}_k$  и  $v^j \in \mathfrak{S}_l$ . Предположим, что интенсивность столкновений частиц  $\Phi(v^i, v^j) = \Phi(v^j, v^i)$  не зависит от направления столкновений, а зависит только от значения кинетической энергии сталкивающихся частиц, т. е.

$$\Phi(v^i, v^j) = \bar{\Phi}(E_k, E_l), \quad \forall v^i \in \mathfrak{S}_k, \quad \forall v^j \in \mathfrak{S}_l.$$

С учетом сделанных предположений о характере переменных и введенных обозначений формула (4.31) преобразуется к виду

$$\sum_{v \in \Omega} \bar{\delta}_{E, v^2} S^{(v)}(f) = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \sum_{l \neq 0} [1 + \bar{\delta}_{E, E_k + E_l} - \bar{\delta}_{E, E_k} - \bar{\delta}_{E, E_l}] \bar{\Phi}(E_k, E_l) \beta_{k,l} \bar{f}(E_k, t) \bar{f}(E_l, t). \quad (4.32)$$



Умножим обе части тождества (4.2) на функцию  $\varphi = \bar{\delta}_{E, v^2}$  при значении  $E \in \{E_k\}_{k=0}^{\infty}$  и просуммируем обе части тождества по значениям скорости  $v \in \mathfrak{S}_k$ . Тогда с учетом формулы (4.32) получаем кинетическое уравнение для функции  $\bar{f}(E_k, t)$ :

$$\begin{aligned} \gamma_m \frac{d}{dt} \bar{f}(E_m, t) = & \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \sum_{l \neq 0} [1 + \bar{\delta}_{E_m, E_k + E_l} - \bar{\delta}_{E_m, E_k} - \\ & - \bar{\delta}_{E_m, E_l}] \bar{\Phi}(E_k, E_l) \beta_{k,l} \bar{f}(E_k, t) \bar{f}(E_l, t), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$

Перепишем уравнение (4.33) в переменных  $n_m(t)$  — концентрации заполнения энергетических уровней. Тогда справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_m = & \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \sum_{l \neq 0} [1 + \bar{\delta}_{E_m, E_k + E_l} - \bar{\delta}_{E_m, E_k} - \bar{\delta}_{E_m, E_l}] \tilde{\Phi}_{k,l} n_k n_l, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$m = 0, 1, \dots,$

где

$$\tilde{\Phi}_{k,l} = \bar{\Phi}(E_k, E_l) \beta_{k,l} \gamma_k^{-1} \gamma_l^{-1}. \quad (4.35)$$

Преобразуем уравнение (4.34), выполняя суммирование в правой части:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_m = & \bar{\delta}_{m,0} \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \sum_{l \neq 0} \tilde{\Phi}_{k,l} n_k n_l + \\ & + (1 - \bar{\delta}_{m,0}) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{E_k + E_l = E_m \\ E_k \neq 0, E_l \neq 0}} \tilde{\Phi}_{k,l} n_{k-l} n_l - \sum_{E_l \neq 0} \tilde{\Phi}_{k,l} n_k n_l \right\}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$m = 0, 1, \dots$

Уравнение (4.36) приобретает особенно простой вид для равноотстоящих энергетических уровней, т. е. когда  $E_m = mE_1$ ,  $E_1 > 0$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_m = & \bar{\delta}_{m,0} \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \tilde{\Phi}_{k,l} n_k n_l + (1 - \bar{\delta}_{m,0}) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+l=m \\ k \geq 1, l \geq 1}} \tilde{\Phi}_{k,l} n_{k-l} n_l - \sum_{l \geq 1} \tilde{\Phi}_{k,l} n_k n_l \right\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$m = 0, 1, \dots$

Очевидно, что система уравнений (4.37) при номерах  $m \in \mathbb{N}$  совпадает с уравнением Смолуховского кинетической теории коагуляции (4.26). Таким образом, уравнение Смолуховского является

специальной разновидностью модели ортогонально сталкивающихся частиц, когда интенсивность взаимодействий и функция распределения частиц зависят от нормы вектора скорости, т. е. через кинетическую энергию. Если в начальный момент времени выполнено условие

$$\sum_{m=0}^{\infty} n_m(0) = 1, \quad (4.38)$$

то значения концентраций  $n_m(t)$  являются значениями вероятности обнаружения частицы на энергетическом уровне  $E_m$ .

Вывод уравнения (4.37) с условием (4.38) мы рассмотрим в следующей гл. 5 в рамках обоснования сходимости метода имитационного моделирования к решениям уравнения Смолуховского (4.26) кинетической теории коагуляции.

Отметим, что рассмотренная выше в рамках вычислительного эксперимента модель плоского газа (рис. 4.1) соответствует уравнению (4.34) с энергетическими уровнями  $E_m = 2^{m-1} \bar{\delta}_{m,0}$ . При этом на каждом уровне число направлений скоростей

$$\gamma_m = \text{card } \Omega \cap \mathfrak{S}_m = 8 \quad \text{при } m \geq 1.$$

Число  $\beta_{k,l}$  всех ортогональных пар скоростей  $\{v^i, v^j\}$ , принадлежащих паре энергетических уровней  $v^i \in \mathfrak{S}_k$  и  $v^j \in \mathfrak{S}_l$  в рамках этой модели, равно 16. В вычислительном эксперименте интенсивность столкновений частиц равна

$$\Phi(v, v_1) = \bar{\delta}_{(v, v_1)_{\mathbb{R}^2}, 0} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\delta}_{v^2, 2^{-k}} \bar{\delta}_{v_1^k, 2^{-k}}.$$

Поэтому в данном случае выполняется соотношение

$$\tilde{\Phi}_{p,q} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\delta}_{p, 2^{-k}} \bar{\delta}_{q, 2^{-l}}.$$

Положим в соотношении (4.37)  $\tilde{n}_k = n_m$  при  $m = 2^{k-1}$ . Тогда для значений  $\tilde{n}_k$  получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{n}_m &= \bar{\delta}_{m,0} \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \tilde{\Phi}_{k,k} (\tilde{n}_k)^2 + \\ &+ (1 - \bar{\delta}_{m,0}) \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{m-1, m-1} (\tilde{n}_{m-1})^2 - \tilde{\Phi}_{m,m} (\tilde{n}_m)^2 \right\}, \\ &m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

При значениях  $m \geq 1$  это выражение превращается в соотношение (4.24), использовавшееся в вычислительном эксперименте

для аналитического описания концентраций газа на энергетических уровнях  $E_m = 2^{m-1}\bar{\delta}_{m,0}$ .

На основании результатов проведенного вычислительного эксперимента для случая плоского газа (рис. 4.1) можно сделать вывод, что решение уравнения Смолуховского с ядром  $\tilde{\Phi}_{p,q}$  практически совпадает с результатом имитационного моделирования, см. рис. 4.2 на одной истории розыгрыша.

### § 9. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ (4.34)–(4.37) НА ПРИМЕРЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ НА СФЕРАХ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В тесте рассматриваются энергетические уровни в пространстве скоростей  $\mathbb{R}_3$  с кинетической энергией  $E_m = m$  на следующих энергетических уровнях:

$$\mathfrak{F}_m = \{v^i \in \mathbb{R}_3 : (v^i, v^i)_{\mathbb{R}_3} = m\}, \quad m = 0, 1, 2.$$

В начальный момент времени частицы системы имеют скорости, сосредоточенные на единичной сфере в пространстве  $\mathbb{R}_3$  по трем ортогональным направлениям, которые задаются ортами

$$e_1 = (1, 0, 0); \quad e_2 = (0, 1, 0); \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Уровень  $\mathfrak{F}_1$  состоит из шести значений скорости  $v_{\pm}^{i,1} = \pm e_i$ . Для каждого значения выбранных скоростей имеется четыре ортогональных к ней скорости на уровне  $\mathfrak{F}_1$ . В рамках модели допустим столкновения только между частицами, находящимися на уровне  $\mathfrak{F}_1$  и имеющими ортогональные скорости. Соответственно этому требованию интенсивность столкновений частиц зададим формулой

$$\Phi(v, v_1) = \bar{\delta}_{v^2,1} \bar{\delta}_{v_1^2,1} \bar{\delta}_{(v,v_1)_{\mathbb{R}_3},0}. \quad (4.39)$$

Таким образом, в столкновениях участвуют пары частицы с кинетической энергией, равной 1, при условии ортогональности скоростей. Образующиеся частицы с кинетической энергией 0 и 2 во взаимодействиях не участвуют. Обозначим  $v_{\pm}^{i,2}$  суммы попарно ортогональных скоростей частиц на уровне  $\mathfrak{F}_1$ , соответствующих скоростям  $v_{\pm}^i$ . Совокупность  $\{v_{\pm}^{i,2}\}$  составляет уровень  $\mathfrak{F}_2$ , а уровень  $\mathfrak{F}_0 = \{0\}$ . В рамках выбранной схемы взаимодействий одночастичное фазовое пространство

$$\Omega = \mathfrak{F}_0 \cup \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2.$$

Для описания динамики рассматриваемой системы предположим, что в начальный момент времени частицы равномерно распределены

на уровнях  $\mathfrak{S}_m$ ,  $m = 0, 1, 2$ , с суммарной концентрацией, равной 1. Тогда для аналитического описания динамики такой модели применимо уравнение Смолуховского (4.37), которое в данном конкретном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_m &= \bar{\delta}_{m,0} \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{1,1} n_1^2 + \\ &+ (1 - \bar{\delta}_{m,0}) \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{m-1,m-1} n_{m-1}^2 - \tilde{\Phi}_{m,m} n_m^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$m = 0, 1, 2,$$

где ядро взаимодействий  $\tilde{\Phi}_{m,m}$  вычисляется по формуле (4.35). Поскольку для заданной схемы взаимодействий частиц

$$\beta_{k,m} = 24\bar{\delta}_{1,m}, \quad \gamma_1 = 6,$$

то справедливо соотношение

$$\tilde{\Phi}_{m,m} = \frac{2}{3} \bar{\delta}_{1,m}. \quad (4.41)$$

Аналитическое решение системы (4.40), (4.41) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} n_0(t) &= n_0(0) + \frac{1}{3} \cdot \frac{n_1(0)t}{1 + (2/3)n_1(0)t}; \\ n_1(t) &= \frac{n_1(0)}{1 + (2/3)n_1(0)t}; \\ n_2(t) &= n_2(0) + \frac{1}{3} \cdot \frac{n_1(0)t}{1 + (2/3)n_1(0)t}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

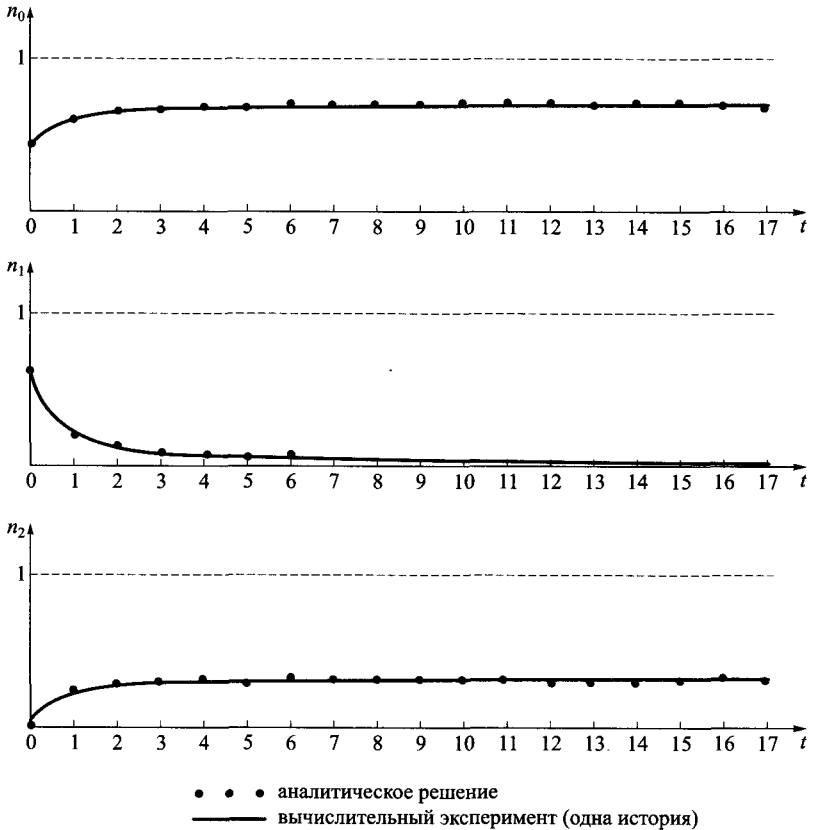
На рис. 4.3 приведены результаты имитационного моделирования столкновений по закону (4.39). Параметры вычислительного эксперимента: число частиц  $N = 3 \cdot 10^3$ ; шаг по времени  $\tau = 10^{-3}$ ; число повторных испытаний для выбора сталкивающихся пар на этом временном промежутке равно

$$Q(N) = 29,7 \cdot 10^3.$$

Длина промежутка времени вычислений  $T = 17$ .

На каждом из шести ортогональных направлений движения в начальный момент времени загружалось по 300 частиц на энергетическом уровне  $E_1 = 1$ . На энергетическом уровне  $E_0 = 0$  загружалось 1200 частиц, а на энергетическом уровне  $E_2 = 2$  частицы в начальный момент времени отсутствуют. Таким образом, начальные данные в аналитическом выражении (4.42) следующие:

$$n_0(0) = 0.4; \quad n_1(0) = 0.6; \quad n_2(0) = 0.$$



**Рис. 4.3.** Результаты моделирования ортогональных столкновений на единичной сфере в пространстве  $\mathbb{R}_3$

Результаты сравнительного анализа графиков вычислительного эксперимента (одна история) и аналитического решения уравнения Смолуховского (4.42) (см. рис. 4.3) позволяют сделать вывод об адекватности математической модели коагуляции кинетической энергии (4.40), (4.41), (4.42) и имитационной модели ортогональных столкновений частиц в пространстве  $\mathbb{R}_3$  с интенсивностью рассеяния (4.39).

Формулы (4.42) определяют вероятность обнаружения частицы на каждом энергетическом уровне. Так что концентрации  $n_0(t)$ ,  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$  — это вероятности, их сумма равна 1, что соответствует закону сохранения массы в физической кинетике. Соответственно

математическое ожидание скорости по этой системе значений вероятности (гидродинамическая скорость газа относительно центра его масс) равно нулю — закон сохранения импульса. Дисперсия скоростей (среднее значение квадрата скоростей) — это полная кинетическая энергия системы. Ее величина остается неизменной, что соответствует закону сохранения энергии. Эволюция системы во времени выглядит следующим образом. Взаимные ортогональные соударения частиц на энергетическом уровне  $\mathfrak{E}_1$  приводят к гибели частиц на нем и, соответственно, к рождению частиц на энергетических уровнях  $\mathfrak{E}_0$  и  $\mathfrak{E}_2$ . Таким образом, асимптотически система распадается на две фракции: покоящуюся компоненту относительно центра масс (сосредоточенную на энергетическом уровне  $\mathfrak{E}_0$  при нулевой температуре) и подвижную компоненту  $\mathfrak{E}_2$ , разлетающуюся симметрично в пространстве  $\mathbb{R}_3$ .

Отметим, что вся энергия системы сосредоточена на множествах  $\mathfrak{E}_1$  и  $\mathfrak{E}_2$ . При этом асимптотически, когда  $t \rightarrow +\infty$ , вся энергия переходит на уровень  $\mathfrak{E}_2$ .

## § 10. ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ.

### НЕПРЕРЫВНОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО $\Omega = \mathbb{R}_n$

В этом разделе рассматривается переход от кинетического уравнения (4.2), с оператором столкновений (4.19) к уравнению Смолуховского с оператором столкновений (1.8) с непрерывными переменными значений скорости частиц  $\Omega = \mathbb{R}_n$ . По существу, рассуждения аналогичны дискретному случаю, рассмотренному выше. Однако, ввиду специфики вывода, приведем детальные рассуждения по переходу от уравнения Больцмана с оператором столкновений (4.19) к уравнению Смолуховского кинетической теории коагуляции [56].

Пусть неотрицательная функция одной переменной

$$\psi_{\Delta}(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

является аппроксимацией обобщенной функции Дирака, т. е.

$$\psi_{\Delta} \in \overset{\circ}{C}(\mathbb{R}),$$

и для каждой непрерывной функции  $f$  на  $\mathbb{R}$  справедливо равенство

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{\Delta}(x) dx \rightarrow f(0).$$

Умножим обе части уравнения (4.2) с оператором столкновений (4.19) на финитную функцию

$$\varphi_{\Delta}(v) = \psi_{\Delta}(v^2 - E), \quad v \in \mathbb{R}_n, \quad E \geq 0,$$

и проинтегрируем полученное выражение по переменной  $v \in \mathbb{R}_n \setminus \{0\}$ . Перейдем в подынтегральных выражениях в сферическую систему координат на  $\mathbb{R}_n$ :

$$(r, \theta), \quad 0 \leq r < \infty, \quad \theta \in S_{n-1} = \{\theta \in \mathbb{R}_n : \theta^2 = 1\}.$$

Обозначим

$$c_n = \int_{S_{n-1}} d\theta.$$

Положим

$$f(v, t) = \widehat{f}(r, \theta, t), \quad \widehat{\Phi}(r, \theta, r_1, \theta_1) \equiv \Phi(v, v_1),$$

где

$$v = (r, \theta), \quad v_1 = (r_1, \theta_1).$$

Таким образом, для абсолютно непрерывной компоненты решения уравнения (4.2) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{n-1}} d\theta \int_{0+}^{\infty} r^{n-1} \psi_{\Delta}(r^2 - E) \widehat{f}(r, \theta, t) dr = \\ & = \frac{1}{2} \int_{S_{n-1}} d\theta \int_{S_{n-1}} d\theta_1 \int_{0+}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} \widehat{\Phi}(r, \theta, r_1, \theta_1) r^{n-1} r_1^{n-1} \times \\ & \times [\psi_{\Delta}(r^2 + r_1^2 - E) - \psi_{\Delta}(r^2 - E) - \psi_{\Delta}(r_1^2 - E)] \times \\ & \times \widehat{f}(r, \theta, t) \widehat{f}(r_1, \theta_1, t) \delta_{0, (\theta, \theta_1)_{\mathbb{R}_n}} dr dr_1. \end{aligned} \quad (4.43)$$

При получении выражения (4.43) использовалось свойство симметричности функции  $\Phi$ , а также равенство

$$v^2 = (v - v_1)^2 + v_1^2$$

для ортогональных скоростей  $v - v_1$  и  $v_1$ . Сделаем теперь предположение об отсутствии угловой зависимости (т. е. зависимости от переменной  $\theta$ ) функции  $\widehat{f}(r, \theta, t)$  и интенсивности столкновений  $\widehat{\Phi}$ . В этих предположениях введем обозначения

$$\begin{aligned} e &= r^2, \quad \bar{f}(e, t) = \frac{1}{2} c_n r^{n-2} \widehat{f}(r, \theta, t), \\ \widehat{\Phi}(r, \theta, r_1, \theta_1) &= \widetilde{\Phi}(e, e_1), \quad e > 0, \quad e_1 > 0. \end{aligned}$$

Тогда в этих обозначениях тождество (4.43) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{0+}^{\infty} \psi_{\Delta}(e-E) \bar{f}(e,t) de = \\ & = \frac{1}{2c_n^2} \int_{S_{n-1}} d\theta \int_{S_{n-1}} d\theta_1 \int_{0+}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} \tilde{\Phi}(e, e_1) \times \\ & \times [\psi_{\Delta}(e+e_1-E) - \psi_{\Delta}(e-E) - \psi_{\Delta}(e_1-E)] \times \\ & \times \bar{f}(e,t) \bar{f}(e_1,t) \delta_{0,(\theta,\theta_1)_{\mathbb{R}^n}} dr dr_1. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Учитывая равенство

$$\int_{S_{n-1}} \delta_{0,(\theta,\theta_1)_{\mathbb{R}^n}} d\theta_1 = c_{n-1},$$

получаем

$$\int_{S_{n-1}} d\theta \int_{S_{n-1}} \delta_{0,(\theta,\theta_1)_{\mathbb{R}^n}} d\theta_1 = c_{n-1} c_n.$$

Подставляя это выражение в равенство (4.44), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{0+}^{\infty} \psi_{\Delta}(e-E) \bar{f}(e,t) de = \\ & = \frac{c_{n-1}}{2c_n} \int_{0+}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} \tilde{\Phi}(e, e_1) [\psi_{\Delta}(e+e_1-E) - \\ & - \psi_{\Delta}(e-E) - \psi_{\Delta}(e_1-E)] \bar{f}(e,t) \bar{f}(e_1,t) de de_1. \end{aligned}$$

Полагая, что функция  $\bar{f}$  непрерывна по переменной  $e$ , устремим в полученном тождестве параметр  $\Delta$  к 0. Тогда в результате такого формального предельного перехода получаем классическое уравнение Смолуховского [56] кинетической теории коагуляции в непрерывных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(E,t) & = \frac{1}{2} \int_{0+}^E \bar{\Phi}(E-E_1, E_1) \bar{f}(E-E_1,t) \bar{f}(E_1,t) dE- \\ & - \int_{0+}^{\infty} \bar{\Phi}(E, E_1) \bar{f}(E,t) \bar{f}(E_1,t) dE_1, \quad 0 < E < +\infty, \end{aligned} \quad (4.45)$$



с ядром

$$\bar{\Phi}(E, E_1) = \frac{c_{n-1}}{c_n} \tilde{\Phi}(E, E_1). \quad (4.46)$$

Прямым вычислением получаем выражение для сингулярной части  $\delta_0(dE)f_0(t)$  решения уравнения (4.2), (4.19), которая описывает покоящиеся частицы относительно центра масс системы:

$$\frac{d}{dt} f_0(t) = \frac{1}{2} \int_{0+}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} \bar{\Phi}(E, E_1) \bar{f}(E, t) \bar{f}(E_1, t) dE dE_1. \quad (4.47)$$

Очевидно, что выражение

$$(1 - \bar{\delta}_{0,E}) \bar{f}(E, t) dE + \delta_0(dE) \times \\ \times \left( f_0(0) + \int_{0+}^{\infty} \bar{f}(E_1, 0) dE_1 - \int_{0+}^{\infty} \bar{f}(E_1, t) dE_1 \right) \quad (4.48)$$

задает распределение частиц в энергетическом интервале  $dE$ . В частности, если в начальный момент времени выполнено равенство

$$f_0(0) + \int_{0+}^{\infty} \bar{f}(E_1, 0) dE_1 = 1, \quad (4.49)$$

то формула (4.47) определяет распределение вероятностей обнаружения частицы на энергетических уровнях системы.

## § 11. СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (4.2), (4.19)

**Пример 4.1.** Рассмотрим задачу Коши для пространственно однородного уравнения (4.2) с оператором столкновений (4.19), полагая, что интенсивность столкновений частиц имеет вид

$$\Phi(v, v_1) = \begin{cases} 1, & (v, v_1)_{\mathbb{R}_n} = 0, \\ 0 & (v, v_1)_{\mathbb{R}_n} \neq 0, \end{cases} \quad v \neq 0, \quad (4.50)$$

причем начальное распределение частиц по скоростям зададим выражением

$$f(dv, 0) = \frac{2}{c_n} (1 - f_0(0)) (1 - \bar{\delta}_{v,2,0})(v^2)^{(2-n)/2} \exp(-v^2) \cdot dv + \\ + \frac{2}{c_n} f_0(0) \cdot \delta_{v,2,0}(dv), \quad (4.51) \\ v \in \mathbb{R}_n.$$

Это соотношение означает, что в начальный момент времени вероятность обнаружения частицы в покоящейся компоненте газа относительно центра масс равна  $0 \leq f_0(0) \leq 1$ , а соответствующая вероятность для подвижной компоненты равна  $1 - f_0(0)$ . При этом частицы подвижной компоненты распределены по максвелловскому закону. Тогда соответствующая функция распределения частиц по энергиям  $\bar{f}(E, t)$  при положительных значениях энергии  $E$  в данном случае удовлетворяет уравнению (4.45), где

$$\bar{\Phi}(E, E_1) = \frac{c_{n-1}}{c_n}, \quad E > 0, E_1 > 0. \quad (4.52)$$

В соответствии с начальными данными (4.51), имеем

$$\bar{f}(E, 0) = (1 - f_0(0)) \exp(-E), \quad E > 0. \quad (4.53)$$

Для отыскания решения задачи Коши (4.45), (4.52), (4.53) применим формулу для решения уравнения Смолуховского с постоянным ядром  $\Phi(x, y) = 1$  и экспоненциальными начальными данными (пример 1.3). В результате получаем равенство

$$\begin{aligned} \bar{f}(E, t) &= \frac{1 - f_0(0)}{\left(1 + [1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}t}{2c_n}\right)^2} \times \\ &\times \exp\left(-E \left(1 + [1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}t}{2c_n}\right)^{-1}\right), \quad E > 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Подставляя (4.52) в выражение (4.47), получаем следующее значение вероятности обнаружения частиц в неподвижной компоненте:

$$f_0(t) = 1 - [1 - f_0(0)] \left(1 + [1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}t}{2c_n}\right)^{-1}. \quad (4.55)$$

Отметим, что для первых трех значений  $n = 1, 2, 3$  размерности пространства скоростей соответствующие значения коэффициентов имеют вид

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 2\pi, \quad c_3 = 4\pi.$$

Таким образом, соответствующее распределение частиц по скоростям (решение задачи Коши (4.2), (4.19), (4.50), (4.51)) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} f(dv, t) &= \frac{2}{c_n} (1 - \bar{\delta}_{v^2, 0})(v^2)^{(2-n)/2} \frac{1 - f_0(0)}{\left(1 + [1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}t}{2c_n}\right)^2} \times \\ &\times \exp\left(-v^2 \left(1 + [1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}t}{2c_n}\right)^{-1}\right) \cdot dv + \\ &+ \frac{2}{c_n} f_0(t) \cdot \delta_{v^2, 0}(dv), \quad v \in \mathbb{R}_N, \end{aligned} \quad (4.56)$$

где вероятность обнаружить частицы в состоянии покоя  $f_0(t)$  определяется формулой (4.54).

Решение (4.54) описывает релаксацию газа при значениях времени  $t \rightarrow +\infty$  для ортогонально сталкивающихся частиц в состоянии покоя относительно центра масс (к атомарной мере Дирака, сосредоточенной на частицах с нулевой скоростью относительно центра масс газа):

$$f(dv, t) \rightarrow \frac{2}{c_n} \cdot \delta_{v^2, 0}(dv). \quad (4.57)$$

При этом температура газа определяется формулой

$$T^\circ = K \left( 1 + [1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1} t}{2c_n} \right),$$

где  $K$  — положительная постоянная.

**Пример 4.2.** Рассмотрим задачу Коши для пространственно однородного уравнения (4.2) с оператором столкновений (4.19), полагая, что интенсивность столкновений частиц имеет вид

$$\Phi(v, v_1) = \begin{cases} v^2 + v_1^2, & (v, v_1)_{\mathbb{R}^n} = 0, \\ 0 & (v, v_1)_{\mathbb{R}^n} \neq 0, \end{cases} \quad v \neq 0, \quad v_1 \neq 0, \quad (4.58)$$

с начальными данными (4.51). Этой ситуации соответствует уравнение Смолуховского (4.45) с функцией

$$\bar{\Phi}(E, E_1) = \frac{c_{n-1}}{c_n} (E + E_1), \quad E > 0, E_1 > 0. \quad (4.59)$$

Рассмотрим задачу в этом случае задачу Коши с начальными данными (4.53). Применяя формулы из примера 1.1, отыскиваем значение вероятности обнаружения частиц в неподвижной компоненте:

$$f_0(t) = 1 - [1 - f_0(0)] \exp\left(-t[1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}}{c_n}\right). \quad (4.60)$$

Соответствующее решение задачи (4.2), (4.19), (4.50), (4.51) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(dv, t) = & dv \cdot [1 - f_0(0)] \frac{2}{c_n} (1 - \bar{\delta}_{v^2, 0})(v^2)^{-n/2} \times \\ & \times \frac{\exp(-t[1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}}{c_n})}{\sqrt{1 - \exp(-t[1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}}{c_n})}} \times \\ & \times I_1\left(\left(2v^2 \sqrt{1 - \exp(-t[1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}}{c_n})}\right) \times \right. \\ & \left. \times \exp(-v^2(2 - [1 - f_0(0)] \exp(-t[1 - f_0(0)] \frac{c_{n-1}}{c_n})))\right) + \\ & + \frac{2}{c_n} f_0(t) \cdot \delta_{v^2, 0}(dv), \end{aligned} \quad (4.61)$$

где  $f_0$  определяется по формуле (4.60).

**Пример 4.3.** Рассмотрим задачу Коши для пространственно однородного уравнения (4.2) с оператором столкновений (4.19), полагая, что интенсивность столкновений частиц имеет вид

$$\Phi(v, v_1) = \begin{cases} v^2 \cdot v_1^2, & (v, v_1)_{\mathbb{R}_n} = 0, \\ 0 & (v, v_1)_{\mathbb{R}_n} \neq 0, \end{cases} \quad (4.62)$$

$$v \neq 0, \quad v_1 \neq 0,$$

с начальными данными в задаче Коши

$$f(dv, 0) = \frac{2}{c_n} (1 - \bar{\delta}_{v^2, 0})(v^2)^{-n/2} \exp(-v^2) \cdot dv + \frac{2}{c_n} f_0(0) \cdot \delta_{v^2, 0}(dv), \quad (4.63)$$

$$v \in \mathbb{R}_n,$$

где положим  $f_0(0) = 0$  для упрощения записи формулы решения задачи. Тогда

$$\bar{f}(E, 0) = E^{-1} \exp(-E), \quad E > 0.$$

Соответствующее решение задачи Коши для уравнения Смолуховского в соответствии с формулой из примера 1.2 имеет следующий вид [37]:

$$\bar{f}(E, t) = \begin{cases} E^{-2} t^{-1/2} I_1(2Et^{-1/2}) \exp(-E(1+t)), & 0 \leq t \leq 1, \\ E^{-2} t^{-1/2} I_1(2Et^{-1/2}) \exp(-2Et^{-1/2}), & t \geq 1. \end{cases}$$

Соответствующее этой формуле решение задачи (4.2), (4.19), (4.50), (4.51) имеет вид:

$$f(dv, t) = dv \cdot \frac{2}{c_n} (1 - \bar{\delta}_{v^2, 0})(v^2)^{-(n+2)/2} t^{-1/2} \times$$

$$\times I_1(2v^2 t^{-1/2}) \exp(-v^2(1+t)) + \frac{2}{c_n} f_0(t) \cdot \delta_{v^2, 0}(dv),$$

при  $0 \leq t \leq 1$ , а для значений  $t \geq 1$  эта формула переходит в следующее выражение:

$$f(dv, t) = dv \cdot \frac{2}{c_n} (1 - \bar{\delta}_{v^2, 0})(v^2)^{-(n+2)/2} t^{-1/2} \times$$

$$\times I_1(2v^2 t^{-1/2}) \exp(-2v^2 t^{-1/2}) + \frac{2}{c_n} f_0(t) \cdot \delta_{v^2, 0}(dv),$$

где  $f_0(t)$  — вероятность обнаружения частиц в «конденсированном» состоянии определяется формулой (4.47). При значениях времени  $t \rightarrow +\infty$  вероятность  $f_0(t)$  стремится к 1.

## ДВЕ МОДЕЛИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОАГУЛЯЦИИ

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы обратимся к вопросу о связи сходимости разностных схем к решениям задачи Коши для уравнения Смолуховского и предельного поведения результатов прямого статистического моделирования коагуляции (метода Монте-Карло), основанного на случайном розыгрыше актов коагуляции на уровне отдельных частиц. При этом каждая пара выбирается однократно на промежутке времени взаимодействия пары частиц при их соударении. Получено математическое обоснование уравнения Смолуховского для широкого класса интенсивностей коагуляции и начальных данных. Ниже будут рассмотрены также иные правила розыгрыша пар сталкивающихся частиц, основанные на повторных испытаниях с запретом кратных взаимодействий. Подчеркнем, что эти подходы отличаются различной интерпретацией интенсивности взаимодействия частиц и соответствующими коэффициентами в уравнении Смолуховского. Оказывается, метод повторных испытаний играет существенную роль для обоснования и понимания пространственно неоднородных задач для уравнения Смолуховского, к которым мы обратимся в гл. 6.

### § 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНОЙ КОАГУЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ОДНОКРАТНОГО РОЗЫГРЫША ПАРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ (БЫСТРАЯ КОАГУЛЯЦИЯ)

Пусть в объеме  $V(N)$  рассматривается система из  $N$  частиц, имеющих неотрицательную массу. Предположим, что частицы хаотически движутся в объеме  $V(N)$ , испытывая парные столкновения, во время которых частицы могут сливаться, образуя частицы суммарной массы (акт коагуляции). Принятой математической моделью процесса коагуляции при  $N \rightarrow \infty$ ,  $V(N) \rightarrow \infty$  является кинетическое уравнение Смолуховского [259, 260, 56]. Если предположить, что массы частиц системы в начальный момент времени имеют значения

$$m_k = km_1, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad m_1 > 0,$$

то при коагуляции пар частиц значения массы образующихся частиц остаются такими же. Ниже без потери общности будем полагать  $m_1 = 1$ . Обозначим  $u_k(t)$  концентрацию частиц массы  $k \in \mathbb{N}$  в момент времени  $t \geq 0$ ,  $\Phi_{k,l}$  — интенсивность коагуляции частиц с массами  $k$  и  $l$ , при этом

$$\Phi_{k,l} = \Phi_{l,k} \geq 0.$$

Значения оператора столкновений  $S_{\Phi}^{(k)}$  [56, 259, 260], задающие скорость изменения концентраций  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ , определим соотношением

$$S_{\Phi}^{(k)}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l+r=k} \Phi_{l,r} u_l u_r - 2u_k \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{k,l} u_l, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Сразу подчеркнем, что приведенный оператор столкновений получается из классического оператора Смолуховского умножением на коэффициент 2. Эта специфика оператора столкновений отражена в названии модели — быстрая коагуляция и, соответственно, оператор  $S_{\Phi}^{(k)}$  назовем оператором столкновений Смолуховского для быстрой коагуляции. В данном разделе, там, где это не приведет к неоднозначности терминологии, для краткости мы будем использовать термины «оператор Смолуховского» и «уравнение Смолуховского», опуская упоминание о быстрой коагуляции.

Пусть  $\theta$  — функция Хевисайда,  $\chi_M^{(k)} = \theta(M - k)$  при  $M \in \mathbb{N}$  и  $\chi_{\infty}^{(k)} = 1$ . Положим

$$S_{M,\Phi}(u) = \chi_M^{(k)} S_{\Phi}^{(k)} \circ (\chi_M u), \quad M \in \mathbb{N}.$$

Формально включим оператор  $S_{\Phi}$  в однопараметрическое семейство операторов  $S_{M,\Phi}$ ,  $1 \leq M \leq \infty$ , полагая

$$S_{\infty,\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} S_{\Phi}.$$

Будем рассматривать однопараметрическое семейство уравнений

$$\frac{du_k}{dt} = S_{M,\Phi}^{(k)}(u), \quad t > 0, k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq M \leq +\infty, \quad (5.1)$$

включающее в себя уравнения Смолуховского при  $M = \infty$ . Случай  $M < \infty$  формально вкладывается в уравнение Смолуховского быстрой коагуляции ( $M = \infty$ ) при условии, что интенсивность коагуляции  $\Phi_{k,l} = 0$  при  $k > M$  и частицы с массами, большими  $M$ , мгновенно удаляются из системы (например, выпадают в осадок в случае реальных физических систем). Для семейства уравнений (5.1) рассматривается задача Коши с начальными данными

$$u_k(0) = \chi_M^{(k)} \varphi_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad M = 1, \dots, \infty. \quad (5.2)$$

Данный раздел посвящен вопросу о связи сходимости разностных схем к решениям задачи Коши (5.1), (5.2) и предельного поведения при  $N \rightarrow \infty$ ,  $V(N) \rightarrow \infty$  результатов прямого статистического моделирования коагуляции (метода Монте-Карло [81]), основанного на случайном розыгрыше актов коагуляции на уровне отдельных частиц в пространственно однородной системе. На этом пути получен также математически строгий вывод уравнения Смолуховского для широкого класса интенсивностей коагуляции  $\Phi$  и начальных данных  $\varphi$ .

Обозначим

$$l_\lambda = \{u = (u_1, u_2, \dots) : \|u\|_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\lambda k} |u_k| < \infty, \quad \lambda \geq 0\}.$$

Пусть

$$\mathcal{K}_\gamma = \{\Phi : \Phi_{k,l} = \Phi_{l,k} \geq 0 \ (l, k \in \mathbb{N}), \|\Phi\|_\lambda = \sup_{k,l \in \mathbb{N}} |\Phi_{k,l}| (k+l)^{-\gamma} < \infty\}.$$

Положим  $\mathcal{K}^\circ$  — множество финитных функций в  $\mathcal{K}_\gamma$ ,  $\forall \gamma$ . Добавление верхнего индекса + к символу пространства означает конус неотрицательных элементов в нем. Решение задачи Коши (5.1), (5.2) понимается в классическом смысле.

**Теорема 5.1.** Пусть в задаче Коши (5.1), (5.2) выполнены условия

$$\Phi \in \mathcal{K}_\gamma, \quad \gamma \leq 1, \quad \varphi \in l_\lambda^+, \quad \lambda > 0, \quad 1 \leq M \leq \infty.$$

Тогда при всех  $t \geq 0$  и при любом  $1 \leq M \leq \infty$  существует единственное неотрицательное решение  $u(M, t)$  задачи Коши (5.1), (5.2). На каждом конечном отрезке времени  $0 \leq t \leq T$  можно указать число  $\lambda(T) > 0$  такое, что

$$u(M, t) \in l_{\lambda(T)}^+ \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq M \leq \infty,$$

и справедливы соотношения

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(M, t) - u(\infty, t)\|_{\lambda(T)} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^M u_k(M, t) \leq 0, \quad \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^M k u_k(M, t) \leq 0, \quad (5.4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k u_k(\infty, t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \varphi_k, \quad t \geq 0. \quad (5.5)$$

Указанное решение является локально аналитической функцией переменной  $t$  в окрестности  $\mathbb{R}^+$ .

**Замечание 5.1.** При  $\gamma = 0$ ,  $\varphi \in l_0^+$  теорема 5.1 также справедлива. При этом следует положить  $\bar{\lambda}(T) = 0$ . Формула (5.5) имеет место, если ряд в правой части этой формулы сходится.

**Замечание 5.2.** Указанное обоснование уравнения Смолуховского может быть расширено на произвольные неотрицательные симметричные функции  $\Phi_{k,l}$  и неотрицательные начальные данные в классе функциональных решений [43, 52], однако этот вопрос здесь не рассматривается.

Положим в задаче Коши (5.1), (5.2) параметр  $M < \infty$  и на заданном отрезке времени  $0 \leq t \leq T$  рассмотрим разностную схему Эйлера [58, 70]:

$$L_\tau(u^{(\tau)}) = f^{(\tau)}, \quad (5.6)$$

которую детализируем ниже. На сетке

$$D_\tau = \left\{ t_n = n\tau, \tau > 0, 0 \leq n \leq L = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil \right\}$$

определим сеточные функции

$$u_\tau = \{u_k^n, 1 \leq k \leq M, 1 \leq n \leq L\}.$$

Множество сеточных функций  $U_\tau = \{u^{(\tau)}\}$  снабдим нормой

$$\|u^{(\tau)}\|_{U_\tau} = \max_{0 \leq n \leq L} \|u^n\|_0.$$

Определим сеточный оператор  $L_\tau$  формулой

$$L_\tau(u^{(\tau)})|_k^n = \begin{cases} \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} - S_{M,\Phi}^{(k)}(u^n), & 0 \leq n \leq L-1, 1 \leq k \leq M, \\ u_k^0, & n = 0. \end{cases}$$

**Теорема 5.2.** Пусть выполнены условия теоремы 5.1, параметр  $1 \leq M < \infty$ . Тогда разностная схема (5.6) устойчива, аппроксимирует задачу Коши (5.1), (5.2) на каждом решении, указанном в теореме 5.1, и сходится с первым порядком точности.

К доказательству этой теоремы мы вернемся ниже в данной главе.

Перейдем к рассмотрению статистического моделирования процесса парной коагуляции (метод Монте-Карло). Пусть  $V(N) = N \in \mathbb{N}$ . Положим, что каждой частице присвоен номер  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), и она имеет в момент времени  $t \geq 0$  массу  $m_i(t) \in \mathbb{Z}^+$ . Таким образом, состояние системы из  $N$  частиц задается вектором

$$m(t) = (m_1(t), \dots, m_N(t)) \in \mathbb{Z}_N^+.$$



**Определение 5.1.** Назовем *коагуляцией пары частиц* с номерами  $i$  и  $j$  ( $1 \leq i < j \leq N$ ) в системе из  $N$  частиц, находящейся в состоянии  $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}_N^+$ , преобразование

$$A_{i,j}: m \mapsto m' = A_{i,j}(m) \in \mathbb{Z}_N^+$$

такое, что

$$m_k \mapsto m_k, \quad \text{если } k \neq i, j, \quad \text{и } m_i \mapsto m_i + m_j, \quad m_j \mapsto 0.$$

Очевидно, для каждого преобразования  $A_{i,j}$  выполнен закон сохранения массы

$$\sum_{k=1}^N m_k = \sum_{k=1}^N m'_k.$$

Паре сталкивающихся частиц с номерами  $i, j$  ( $i < j$ ) в рассматриваемой системе взаимно-однозначно сопоставим подстановку

$$\pi_{i,j} = \left( \begin{array}{c} 1, 2, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, N \\ 1, 2, \dots, i-1, j, i+1, \dots, j-1, i, j+1, \dots, N \end{array} \right),$$

множество таких подстановок обозначим  $S_2(N)$ . Очевидно,

$$\text{card}(S_2(N)) = C_N^2.$$

Пусть пара сталкивающихся частиц разыгрывается в каждый момент времени  $t_n = n\tau$ ,  $\tau > 0$ , на основе независимого случайного выбора одной из подстановок  $\pi \in S_2(N)$  с вероятностью

$$P(\pi = \pi_{ij}) = \frac{1}{C_N^2}.$$

Тем самым в рассматриваемой системе из  $N$  частиц моделируются хаос, приводящий к парным столкновениям частиц. Пусть в каждый момент времени  $t_n = n\tau$ ,  $\tau > 0$ , рассматриваются независимые случайные величины  $\pi(t)$ , принимающие значения на  $S_2(N)$ . Запись  $\pi(t) = \pi_{ij}$  означает, что в момент времени  $t$  сталкиваются частицы с номерами  $i < j$ . Положим  $A(\pi(t)) = A_{i,j}$ , если  $\pi(t) = \pi_{ij}$ ; обозначим  $E$  — тождественное преобразование. Определим случайную величину  $\eta_{ij}$ ,  $i < j$ , принимающую два значения  $-0$  и  $1$ , где  $1$  означает коагуляцию сталкивающихся частиц с номерами  $i < j$ , а  $0$  — отсутствие коагуляции этих частиц.

Положим, что вероятность коагуляции частицы массы  $k$  с частицей массы  $l$  равна

$$\tau(N)(N-1)\Phi_{k,l} \leq 1,$$

где функция  $\Phi_{k,l}$  называется интенсивностью коагуляции и подчиняется следующему условию:

$$\begin{cases} \Phi_{k,l} = \Phi_{l,k} \geq 0, & k, l \in \mathbb{Z}^+, \\ \Phi_{0,k} = 0, & k \in \mathbb{Z}^+, \\ \Phi_{k,l} = 0, & k > M. \end{cases} \quad (5.7)$$

Величину  $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \tau(N)$  назовем временем столкновения и подчиним соотношению

$$0 < \tau \leq \frac{1}{(N-1)\|\Phi\|_0}. \quad (5.8)$$

Определим случайные величины  $\eta_{ij}(t)$  условной функцией распределения, полагая для  $d = (d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{Z}_N^+$

$$\begin{cases} P(\eta_{ij}(t) = 1 | m(t) = d) = \tau(N)(N-1)\Phi_{d_i, d_j}, \\ P(\eta_{ij}(t) = 0 | m(t) = d) = 1 - \tau(N)(N-1)\Phi_{d_i, d_j}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Акту парной коагуляции в течение промежутка времени  $(t_n, t_{n+1})$ ,  $t_{n+1} = t_n + \tau$ , при выборе подстановки  $\pi(t_n) \in S_2(N)$  соответствует следующее правило преобразования вектора состояния  $m(t) \in \mathbb{Z}_N^+$  коагулирующей системы:

$$\begin{aligned} m(t_n) &\mapsto \xi(t_n) = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta_{\pi_{ij}, \pi(t_n)} [\eta_{ij}(t_n) A(\pi(t_n)) + (1 - \eta_{ij}(t_n)) E] m(t_n). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Пусть  $\Omega_{t_n}$  — конечное множество элементарных исходов для случайного вектора  $m(t_n) \in \mathbb{Z}_N^+$ , а события составляют всевозможные подмножества  $2^{\Omega_{t_n}}$  в  $\Omega_{t_n}$ . Пусть  $P_{t_n}$  — вероятность на  $\Omega_{t_n}$ , задаваемая формулой

$$P_{t_n}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in B} P_{t_n}(\omega) \quad \forall B \subset \Omega_{t_n}.$$

Определим для каждой компоненты вектора  $m(t_n)$  ( $1 \leq i \leq N$ ) функцию распределения

$$F_i^{(N)}(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} P_{t_n}(m_i(t_n) = k).$$

Рассмотрим [143] выборочное (вероятностное) пространство

$$\left\{ \Omega_{t_n}^{(N)}, 2^{\Omega_{t_n}^{(N)}}, P_{t_n}^{(N)} \right\},$$

полагая

$$\Omega_{t_n}^{(N)} = \prod_{i=1}^N \Omega_{t_n}, \quad \omega^{(N)} = (\omega_1, \dots, \omega_N), \quad \omega_i \in \Omega_{t_n},$$

$$P_{t_n}^{(N)}(\omega^{(N)}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^N P_{t_n}(\omega_i).$$

События на выборочном пространстве — это всевозможные подмножества  $2^{\Omega_{t_n}^{(N)}}$  в  $\Omega_{t_n}^{(N)}$ , вероятность которых задается формулой

$$P_{t_n}^{(N)}(B^{(N)}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega^{(N)} \in B^{(N)}} P_{t_n}^{(N)}(\omega^{(N)}) \quad \forall B^{(N)} \subset \Omega_{t_n}^{(N)}.$$

Определим продолжение  $\hat{m}(t_n)$  случайного вектора  $m(t_n)$  на множестве  $\Omega_{t_n}^{(N)}$  формулой

$$\begin{aligned} \hat{m}_i(t_n)|_{\omega^{(N)}} &\stackrel{\text{def}}{=} m(t_n)|_{\omega_i}, \quad \omega^{(N)} = (\omega_1, \dots, \omega_N), \\ \hat{m}(t_n) &= (\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_N). \end{aligned} \quad (5.11)$$

**Лемма 5.1.** Случайные величины  $\hat{m}_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , независимы на выборочном пространстве

$$\{\Omega_{t_n}^{(N)}, 2^{\Omega_{t_n}^{(N)}}, P_{t_n}^{(N)}\},$$

и справедливы равенства

$$P_{t_n}^{(N)}(\hat{m}_i(t_n) = k) = F_i^{(N)}(t_n, k). \quad (5.12)$$

Определим процесс коагуляции. Пусть в момент времени  $t_n$  состояние коагулирующей системы описывается случайным вектором  $m(t_n)$  с независимыми компонентами на вероятностном пространстве

$$\{\Omega_{t_n}, 2^{\Omega_{t_n}}, P_{t_n}\}.$$

Значение вектора состояния коагулирующей системы  $m(t_{n+1})$  на вероятностном пространстве

$$\{\Omega_{t_{n+1}}, 2^{\Omega_{t_{n+1}}}, P_{t_{n+1}}\}$$

в момент времени  $t_{n+1}$  задаем следующей формулой:

$$m(t_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\xi}(t_n), \quad \left( \Omega_{t_{n+1}} = \Omega_{t_n}^{(N)}, P_{t_{n+1}} = P_{t_n}^{(N)} \right), \quad (5.13)$$

где вектор  $\hat{\xi}(t_n)$  — это результат преобразования (5.10) для вектора  $m(t_n)$ , а  $\hat{\xi}(t_n)$  описывается соотношением (5.11).

**Определение 5.2.** Будем говорить, что задан процесс коагуляции, если в каждый момент времени  $t_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , определены функции

распределения

$$F_i^{(N)}(t_n, k), \quad 1 \leq i \leq N, \quad t_n = n\tau(N), \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

**Замечание 5.3.** Формулы (5.7)–(5.13) задают процесс коагуляции.

Обозначим

$$N_k(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \delta_{k, m_i(t_n)}$$

— число частиц, имеющих в момент времени  $t_n$  массу  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$u_k(N, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V(N)} \langle N_k(t_n) \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.14)$$

— среднюю концентрацию частиц массы  $k$ , где  $\langle N_k(t_n) \rangle$  — математическое ожидание случайной величины  $N_k$  на вероятностном пространстве  $\{\Omega_{t_n}, 2^{\Omega_{t_n}}, P_{t_n}\}$ .

Учитывая свойства независимости компонент вектора  $m(t_n)$  в каждый момент времени  $t_n$ , имеем

$$\begin{aligned} u_k^{(N)}(t_{n+1}) &= u_k^{(N)}(t_n) + \\ &+ \frac{N-1}{N} \frac{\tau}{C_N^2} \left\{ \sum_{\substack{l+r=k \\ l, r \geq 1}} \Phi_{l,r} \sum_{1 \leq i < j \leq N} F_i^{(N)}(t_n, l) F_j^{(N)}(t_n, r) - \right. \\ &- \sum_{l \geq 1} \Phi_{k,l} \sum_{1 \leq i < j \leq N} F_i^{(N)}(t_n, k) F_j^{(N)}(t_n, l) - \\ &- \left. \sum_{l \geq 1} \Phi_{l,k} \sum_{1 \leq i < j \leq N} F_i^{(N)}(t_n, l) F_j^{(N)}(t_n, k) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ u_0^{(N)}(t_{n+1}) &= u_0^{(N)}(t_n) + \\ &+ \frac{N-1}{N} \frac{\tau}{C_N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{l \geq 1} \sum_{k \geq 1} \Phi_{k,l} F_i^{(N)}(t_n, l) F_j^{(N)}(t_n, k). \end{aligned} \quad (5.15)$$

**Лемма 5.2.** Пусть функция  $\Phi$  подчиняется соотношениям (5.7). Тогда средние концентрации  $u_k^{(N)}$  для процесса коагуляции (5.7)–(5.13) подчиняются разностному уравнению

$$\frac{u_k^{(N)}(t_{n+1}) - u_k^{(N)}(t_n)}{\tau} = S_{M, \Phi}^{(k)}(u^{(N)}(t_n)) + q_k^{(N)}(t_n), \quad (5.16)$$

$$1 \leq k \leq M,$$

где источник  $q_k^{(N)}(t_n)$  удовлетворяет следующему соотношению:

$$\sup_{\substack{0 \leq n < \infty \\ 1 \leq k \leq M}} |q_k^{(N)}(t_n)| = O(N^{-1}).$$

**Теорема 5.3.** Пусть интенсивность коагуляции  $\Phi$  удовлетворяет соотношениям (5.7), а концентрации  $u_k^{(N)}(0)$  ( $1 \leq k \leq M$ ) сходятся при  $N \rightarrow \infty$  к начальным данным (5.2), удовлетворяющим условиям теоремы 5.1. Тогда для решения  $u(M, t)$  задачи Коши (5.1), (5.2) и последовательности средних концентраций  $u_k^{(N)}(t_n)$  справедливо соотношение

$$\max_{\substack{1 \leq k \leq M, \\ 0 \leq n \leq [T/\tau(N)]}} |u(M, t_n) - u_k^{(N)}(t_n)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для каждого  $T \geq 0$ .

Доказательство теоремы 5.3 является следствием теоремы 5.2 и леммы 5.2.

**Следствие 5.1.** При выполнении условий теоремы 5.1 решение задачи Коши (5.1), (5.2)  $u(\infty, t)$  для уравнения Смолуховского ( $M = \infty$ ) является пределом последовательности средних концентраций (5.14), полученных методом непосредственного моделирования (Монте-Карло) (5.7)–(5.13) при следующих последовательных предельных переходах: сначала  $N \rightarrow \infty$ , а затем  $M \rightarrow \infty$ .

Это утверждение справедливо в силу теоремы 5.3 и свойства (5.3) сходимости приближений  $u_k(M, t) \rightarrow u_k(\infty, t)$  при  $M \rightarrow \infty$ .

**Замечание 5.4.** Тестирование метода Монте-Карло (5.7)–(5.13) проведено в [3, 60–63] для различных видов интенсивности коагуляции и начальных данных посредством сравнения с точными решениями задачи Коши. Данные вычислительных экспериментов указывают на достаточно быструю сходимость приближений к точным решениям при  $N \sim 200$ .

**Замечание 5.5.** Рассмотренные выше утверждения для метода Монте-Карло с зависимостью  $V(N) = N$  аналогичным образом распространяются на случай, когда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(N)N^{-1} > 0.$$

**Замечание 5.6.** Приведенный метод получения уравнения Смолуховского дает в случае имитационной интенсивности столкновений частиц  $\Phi \equiv 1$  уравнение (5.1), полученное в [232] на основе моделирования броуновского блуждания частиц, восходящего к исследованиям М. Смолуховского [259].

### § 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ БЫСТРОЙ КОАГУЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ОДНОКРАТНОГО РОЗЫГРЫША ПАРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Проведен вычислительный эксперимент для широкого класса интенсивностей взаимодействия частиц системы.

Следует отметить, что среднеквадратическая погрешность в вычислительных экспериментах не превышает 1%.

При этом было проведено детальное сравнение спектров распределения частиц по массам с точными решениями уравнения Смолуховского, что дает трактовку решения уравнения Смолуховского [3, 59, 63]. Разработанный алгоритм имитационной модели процесса парной коагуляции был реализован на программном уровне на персональном компьютере и на вычислительных кластерах.

**Подготовка начальных данных в пространственно однородной модели.** При исследовании процесса коагуляции уравнение Смолуховского дополняется начальными условиями на функцию распределения частиц системы по массам

$$u_0(\omega) = u(\omega, t)|_{t=0}.$$

При моделировании физических процессов, которые описываются уравнением Смолуховского, важно правильно задать начальную функцию  $u_0(\omega)$ . Необходимо рассматривать начальные данные задачи Коши, приближенные к начальным данным в реальных физических процессах.

Опишем способ определения начального распределения частиц по массам  $u_0$ . Для этого необходимо задать функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u^* \in l_1^+ : u_i^* \geq 0, i \geq 1, \sum_{i=1}^{\infty} u_i^* < \infty.$$

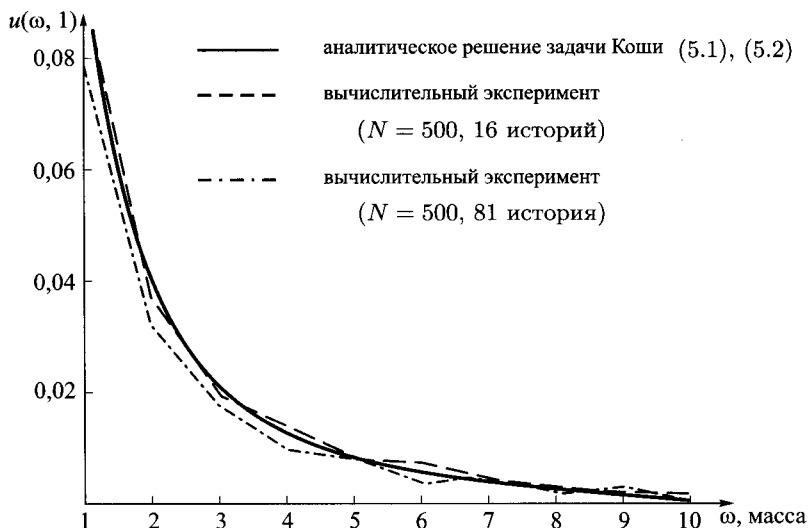
Предположим, что рассматриваемая система состоит из  $N$  частиц. Заданной функции  $u^*$  сопоставим функцию  $u^0$ , которая будет описывать начальное распределение частиц системы по массам по следующему закону:

$$u_i^0 = \frac{m_i}{N}$$

при

$$\frac{m_i}{N} \leq u_i^* < \frac{m_i + 1}{N},$$

где индекс  $i$  определяет массу частицы ( $i \in \mathbb{Z}^+$ ),  $m_i$  — некоторое неотрицательное целое число ( $m_i \in \mathbb{Z}^+$ ).



**Рис. 5.1.** Графики, отражающие зависимость спектров распределения частиц по массам  $u(\omega, t)$  при  $t = 1$  для ядра  $\Phi(\omega, \omega_1) = \omega + \omega_1$  и  $u_0(\omega) = \exp(-\omega)$

**Результаты тестирования пространственно однородной имитационной модели быстрой коагуляции.** На рис. 5.1–5.6 приведен сравнительный анализ результатов моделирования с точными аналитическими решениями задачи Коши (5.1), (5.2) для различных ядер  $\Phi(\omega, \omega_1)$  и начальных данных  $u_0(\omega)$ .

На рис. 5.1 представлены графики, отражающие зависимость распределения частиц по массам в момент времени  $t = 1$  для ядра  $\Phi(\omega, \omega_1) = \omega + \omega_1$  и начальных данных  $u_0(\omega) = \exp(-\omega)$ . На рисунке также приведен график аналитического решения задачи Коши для уравнения Смолуховского. Анализ графиков показывает близость расчетных данных к точным. Увеличение числа историй метода Монте-Карло приводит к тому, что расчетные данные приближаются к аналитическому решению задачи Коши для уравнения Смолуховского.

На рис. 5.2–5.4 изображены графики, отражающие зависимость концентрации частиц массы 1 и 2, относительного числа частиц (соответственно) от времени для ядра

$$\Phi(\omega, \omega_1) = \omega \omega_1$$

и начальных данных

$$u_0(\omega) = \delta_{\omega,1}$$

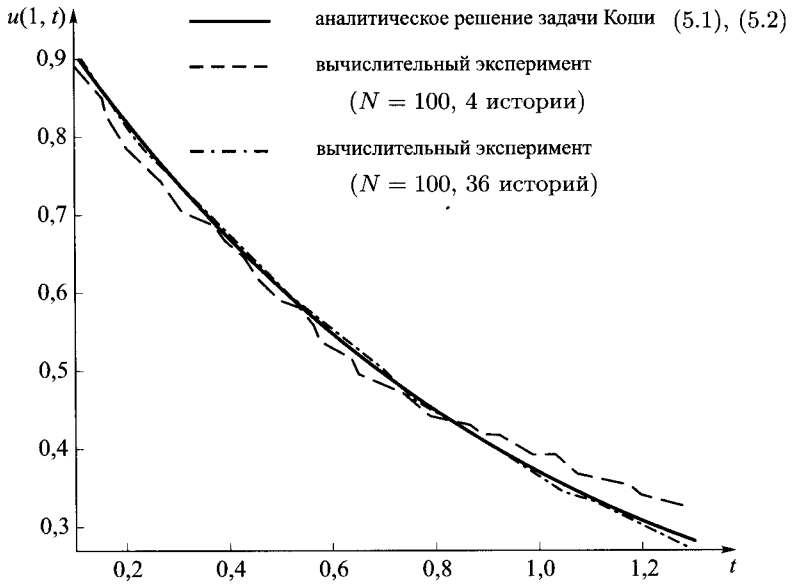


Рис. 5.2. Графики, отражающие зависимость концентрации частиц массы 1 ( $u(1, t)$ ) от времени для ядра  $\Phi(\omega, \omega_1) = \omega\omega_1$  и  $u_0(\omega) = \delta_{\omega,1}$

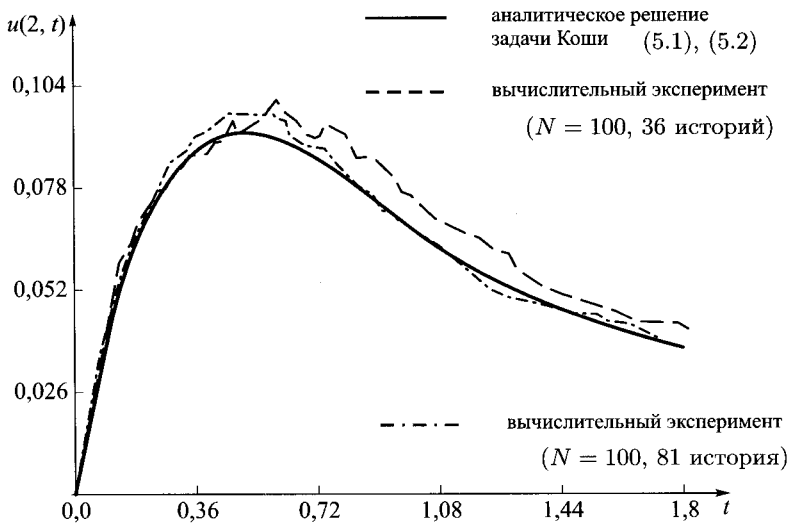


Рис. 5.3. Графики, отражающие зависимость концентрации частиц массы 2 ( $u(2, t)$ ) от времени для ядра  $\Phi(\omega, \omega_1) = \omega\omega_1$  и  $u_0(\omega) = \delta_{\omega,1}$





**Рис. 5.4.** Графики, отражающие зависимость относительного числа частиц  $n(t)$  от времени для ядра  $\Phi(\omega, \omega_1) = \omega\omega_1$  и  $u_0(\omega) = \delta_{\omega,1}$

для различного числа историй. При проведении вычислений число частиц в системе было взято равным 100 ( $N = 100$ ). На графиках также представлены точные решения. Анализ графиков также показывает близость расчетных данных к аналитическим.

На рис. 5.5 представлен сравнительный анализ зависимости относительного числа частиц для ядра  $\Phi(\omega, \omega_1) = 1$  и начальных данных  $u(\omega, 0) = \exp(-\omega)$ . Число частиц в системе  $N = 100$ . На рис. 5.6 наблюдается сближение расчетов к точному решению при увеличении числа частиц в моделируемой системе.

Анализ вычислительных экспериментов показал, что расчетные данные достаточно близки к аналитическим решениям задачи Коши для уравнения Смолуховского для всех рассматриваемых интенсивностей взаимодействия частиц системы  $\Phi$  и начальных данных на функцию распределения частиц по массам  $u_0$ . Следует отметить, что дисперсия в вычислительных экспериментах не превышает 1%.

Относительное число частиц системы соответствует нулевому моменту

$$\sigma_0 = \int_0^{\infty} u(\omega, t) d\omega.$$

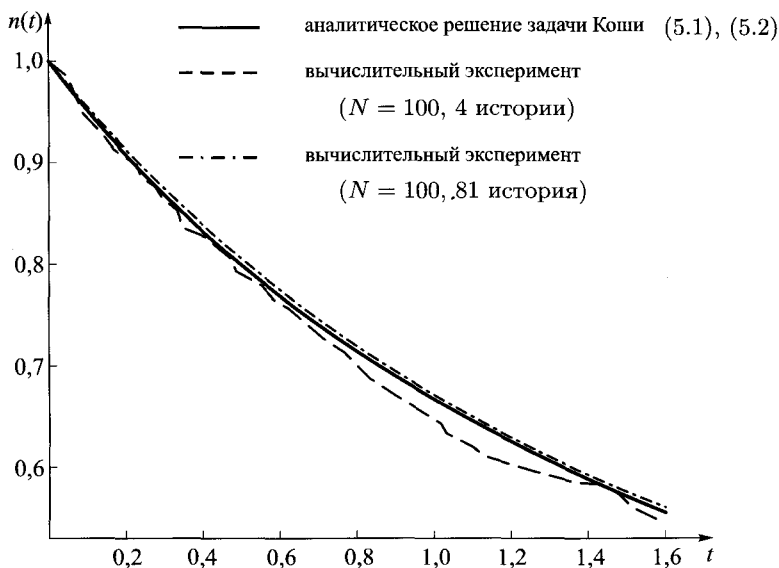


Рис. 5.5. Графики, отражающие зависимость относительного числа частиц  $n(t)$  от времени для ядра  $\Phi(\omega, \omega_1) = 1$  и  $u_0(\omega) = \exp(-\omega)$

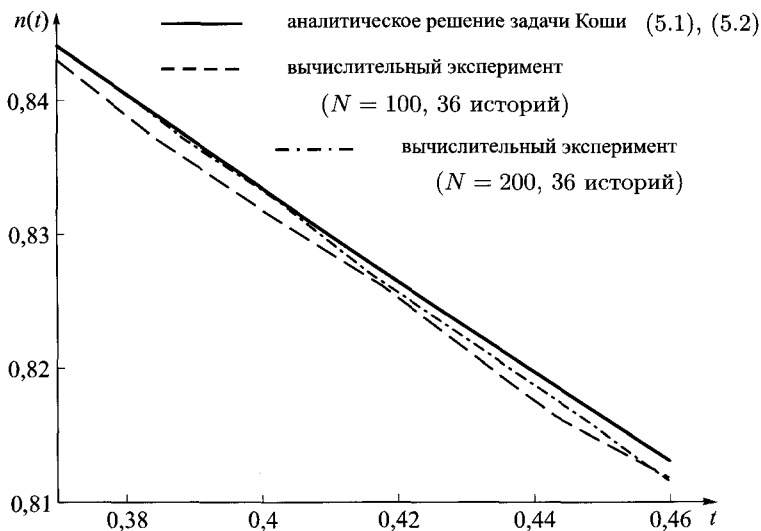


Рис. 5.6. Графики, отражающие зависимость относительного числа частиц  $n(t)$  от времени для ядра  $\Phi(\omega, \omega_1) = 1$  и  $u_0(\omega) = \exp(-\omega)$  при различных  $N$

В исследуемой модели данная величина вычисляется следующим образом:

$$N_{\text{отн}} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{x_i > 0, \\ i=1}}^N 1.$$

#### § 4. МЕТОД ПРЯМОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕДЛЕННОЙ КОАГУЛЯЦИИ, ОСНОВАННЫЙ НА ПОВТОРНЫХ РОЗЫГРЫШАХ ПАР ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Этот раздел посвящен вопросу о связи предельного поведения результатов прямого статистического моделирования методом Монте-Карло процесса коагуляции, основанного на случайном розыгрыше актов коагуляции на уровне отдельных частиц с повторным выбором пары взаимодействующих частиц на каждом шаге по времени. При этом на каждом временном шаге применяется следующее правило: если в процессе повторного розыгрыша номеров сталкивающихся пар частиц получен ранее выбранный номер частицы для заданного времени столкновения, то данная пара во взаимодействии не участвует. Число повторных испытаний по выбору взаимодействующих пар на данном временном шаге предполагается неограниченно возрастающим, когда число частиц в системе  $N \rightarrow \infty$ . Эту процедуру повторных розыгрышей с упомянутым правилом запрета назовем медленной коагуляцией. Сразу подчеркнем, что суть данного названия связана с коэффициентом при ядре  $\Phi$  в уравнении Смолуховского. Для ранее рассмотренной модели быстрой коагуляции коэффициент равен 2, а в модели медленной коагуляции коэффициент равен 1, что соответственно определяет динамику процесса коагуляции. Модель медленной коагуляции полностью адекватна классическому уравнению Смолуховского и позволяет обобщение на пространственно неоднородный случай. В рамках модели медленной коагуляции получено математическое обоснование пространственно неоднородного уравнения Смолуховского для широкого класса начальных данных и вида зависимостей парного взаимодействия частиц  $\Phi$ .

**Модель пространственно однородной медленной коагуляции.** В отличие от рассмотренной выше модели быстрой коагуляции акты парных столкновений в модели медленной коагуляции разыгрываются следующим образом.

Рассмотрим множество  $\Delta$ , состоящее из пар номеров  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ . В каждый момент времени  $t_n$  разыгрываются неза-

висимые случайные величины  $\pi_l^{(s)}(t_n)$  со значениями в  $\Delta$  так, что

$$P\{\pi_l^{(s)}(t_n) = (i, j)\} = \frac{1}{C_N^2}, \quad 1 \leq s \leq Q(N).$$

Возможные пары сталкивающихся частиц в момент времени  $t_n$  выберем как значения набора

$$\{\pi_l^{(s)}(t_n)\}_{s=1}^{Q(N)},$$

накладывая дополнительное ограничение: если хотя бы один из номеров, входящих в пару  $\pi_l^{(s)}(t_n)$  при  $s \geq 2$ , входит в одну из пар

$$\pi_l^{(1)}(t_n), \dots, \pi_l^{(s-1)}(t_n),$$

то для пары  $\pi_l^{(s)}(t_n)$  коагуляция в ячейке  $D_l$  в момент времени  $t_n$  не происходит. Тем самым исключаются многократные взаимодействия для каждой частицы внутри ячеек. Подсчитаем вероятность выбора пары взаимодействующих частиц с номерами  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ . Очевидно, что вероятность выбора этой пары на  $s$ -м шаге в серии  $1 \leq s \leq Q(N)$  независимых испытаний равна

$$\left(\frac{C_{N-2}^2}{C_N^2}\right)^{s-1} \frac{1}{C_N^2},$$

где первый множитель является вероятностью того, что в первых  $s - 1$  испытаниях во множестве  $\Delta$  не появлялась пара с заданными номерами частиц  $i$  или  $j$ . Второй множитель — это вероятность выбора искомой пары на последнем шаге. Таким образом, вероятность выбора пары  $(i, j)$  из множества  $\Delta$  на одном из шагов в серии  $1 \leq s \leq Q(N)$  независимых испытаний равна сумме геометрической прогрессии указанных вероятностей, т. е.

$$\frac{1 - \left(\frac{C_{N-2}^2}{C_N^2}\right)^{Q(N)}}{C_N^2 - C_{N-2}^2}.$$

Если число повторных испытаний  $Q(N)$  по выбору пары взаимодействующих частиц таково, что величина  $Q(N)N^{-1} \rightarrow \infty$ , то при больших значениях  $N$  имеем

$$\frac{1 - \left(\frac{C_{N-2}^2}{C_N^2}\right)^{Q(N)}}{C_N^2 - C_{N-2}^2} \sim \frac{1}{2N}.$$

Повторим дословно рассуждения, приведенные при рассмотрении пространственно однородной модели быстрой коагуляции, с тем

лишь различием, что вероятность коагуляции выбранной пары взаимодействующих частиц определяется следующими условиями.

Положим, что вероятность коагуляции частицы массы  $k$  с частицей массы  $l$  равна  $\Phi_{k,l}\tau \leq 1$ , где функция  $\Phi_{k,l}$  называется интенсивностью коагуляции и подчиняется следующему условию:

$$\begin{cases} \Phi_{k,l} = \Phi_{l,k} \geq 0, & k, l \in \mathbb{Z}^+, \\ \Phi_{0,k} = 0, & k \in \mathbb{Z}^+, \\ \Phi_{k,l} = 0, & k > M. \end{cases} \quad (5.17)$$

Величину  $\tau > 0$  назовем временем столкновения и подчиним соотношению

$$0 < \tau \leq \frac{1}{\|\Phi\|_0}. \quad (5.18)$$

Тогда в принятых выше обозначениях величины

$$u_k(N, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V(N)} \langle N_k(t_n) \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.19)$$

после предельного перехода  $N \rightarrow \infty$  удовлетворяют классическому уравнению Смолуховского

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{l+r=k} \Phi_{l,r} u_l u_r - u_k \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{k,l} u_l, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, модель медленной коагуляции соответствует гипотезам М. Смолуховского.

**Тестирование модели пространственно однородной медленной коагуляции.** Численное моделирование коагуляции по алгоритму с повторным выбором пар взаимодействующих частиц проводилось аналогично случаю быстрой коагуляции. Сравнение имитационного результатов моделирования проводилось с аналитическими решениями и вычислениями методом разностных схем. Для числа частиц  $N \sim 200$ . Для времени взаимодействия частиц  $\tau \sim 10^{-3}$  для одной истории имитационного моделирования на уровне срезки  $M \sim 10^2$  для ядра  $\Phi \sim 1$  типичная погрешность не превышала 2% для общей концентрации частиц и отдельных компонент спектра. Ниже приведены типичные графики для серии пространственно однородных вычислительных экспериментов.

**Модель пространственно неоднородной медленной коагуляции.** Рассматривается физическая система, состоящая из частиц, движущихся вдоль пространственной оси  $\mathcal{O}x = \{x\}$ . Каждая частица характеризуется массой  $k$ , принимающей значения во множестве натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , причем скорость  $v_k$  переноса частиц вдоль

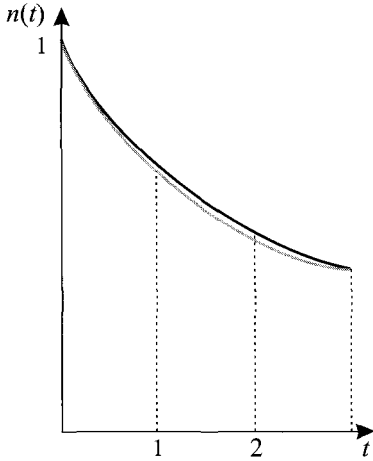


Рис. 5.7. График полной концентрации  $n(t)$  (черный график — Монте-Карло; серый график — точное решение)

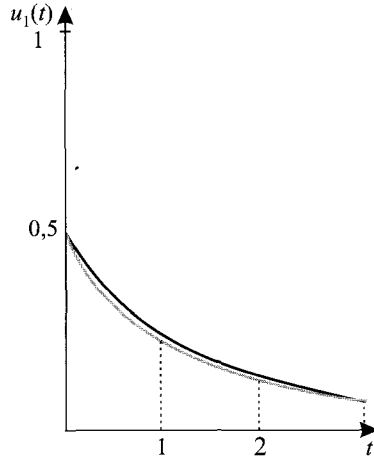


Рис. 5.8. График концентрации  $u_1(t)$  (черный график — Монте-Карло; серый график — точное решение)

оси  $Ox$  является функцией массы частицы (например, падение в вязкой среде под действием силы тяжести по закону Стокса). В процессе движения частицы могут участвовать в парных соударениях. Пара столкнувшихся частиц с массами  $k_1$  и  $k_2$  могут слиться в одну частицу массы  $k_1 + k_2$  с вероятностью  $\Phi_{k_1, k_2}$  (коагуляция). Пусть концентрация частиц массы  $k$  в окрестности точки  $x \in Ox$  в момент времени  $t \geq 0$  равна  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Принятой в физике моделью описания эволюции множества концентраций

$$u(x, t) = \{u_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$$

служит задача Коши для пространственно неоднородного уравнения Смолуховского [28, 56]:

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x} = S_k(u(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, t \geq 0, \quad (5.20)$$

где оператор столкновений Смолуховского имеет вид

$$S_k(u(x, t)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{k-j, j} u_{k-j} u_j - u_k \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{k, j} u_j, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.21)$$

Уравнение (5.20) дополняется начальными данными

$$u_k(x, 0) = u_k^0(x) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}. \quad (5.22)$$

Теорема существования обобщенных решений задачи Коши (5.20)–(5.22) доказана в [56, 40] методом компенсированной компактности для последовательности гладких неотрицательных решений конечномерных задач (5.20), (5.22)  $\{u_{k, M_0}\}_{M_0=1}^{\infty}$  при  $M_0 \rightarrow \infty$ , полученных заменой оператора (5.21) в уравнении (5.20) его конечномерными аппроксимациями

$$S_k^{(M_0)} = I_k^{(M_0)} S_k(I^{(M_0)} \cdot u),$$

где  $I_k^{(M_0)}$  — индикатор натуральных чисел, не превосходящих  $M_0$ .

**Имитационная модель.** Множество пространственных координат  $\mathcal{O}x$  разобьем на ячейки

$$D_l = [x_l, x_{l+1}), \quad x_l = lh, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad h > 0,$$

среди которых размещены частицы, занумерованные натуральными числами  $1 \leq i \leq N$ ,  $N \geq 1$ . Каждому номеру  $i$  соответствует величина  $m_i^{(l)}(t)$ , которая равна массе  $i$ -й частицы, если она находится в момент времени  $t$  в ячейке  $D_l$ , и  $m_i^{(l)}(t) = 0$  в противном случае. Если  $m_i^{(l)}(t) = 0$  для всех ячеек, то частица с номером  $i$  отсутствует в системе. Условимся, что если частица присутствует в системе, то она может находиться в данный момент времени только в одной ячейке. Таким образом, в каждый момент времени состояние системы задается распределением масс

$$M(t) = \left\{ m^{(l)}(t) \right\}_{l \in \mathbb{Z}},$$

где

$$m^{(l)}(t) = (m_1^{(l)}(t), m_2^{(l)}(t), \dots, m_N^{(l)}(t)).$$

Пусть время  $t$  принимает дискретные значения  $t_n = n\tau$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau > 0$ .

Частицы, помещенные в ячейку  $D_l$  в момент времени  $t_n$ , могут участвовать в парных взаимодействиях, приводящих к их коагуляции. Акты парных столкновений и коагуляции разыгрываются следующим образом.

Рассмотрим множество  $\Delta$ , состоящее из пар номеров  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ . В каждой ячейке  $D_l$  в момент времени  $t_n$  разыгрываются независимые случайные величины  $\pi_l^{(s)}(t_n)$  со значениями в множестве  $\Delta$  так, что

$$P\{\pi_l^{(s)}(t_n) = (i, j)\} = \frac{1}{C_N^2}, \quad 1 \leq s \leq Q(N).$$

Возможные пары сталкивающихся частиц в ячейке  $D_l$  в момент времени  $t_n$  выберем как значения набора

$$\{\pi_l^{(s)}(t_n)\}_{s=1}^{Q(N)},$$

накладывая дополнительное ограничение: если хотя бы один из номеров, входящих в пару  $\pi_l^{(s)}(t_n)$  при  $s \geq 2$ , входит в одну из пар

$$\pi_l^{(1)}(t_n), \dots, \pi_l^{(s-1)}(t_n),$$

то для пары  $\pi_l^{(s)}(t_n)$  коагуляция в ячейке  $D_l$  в момент времени  $t_n$  не происходит. Тем самым исключаются многократные взаимодействия для каждой частицы внутри ячеек.

Возможность коагуляции для выбранных вышеуказанным способом пар номеров сталкивающихся частиц определим розыгрышем совокупности независимых случайных величин

$$\eta_{(i,j)(t_n)}^{(l)}, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (i, j) \in \Delta,$$

принимающих два значения: 0 и 1. Значение 0 означает запрет коагуляции, а 1 — наличие коагуляции для пары частиц с номерами  $(i, j)$  в ячейке  $D_l$  в момент времени  $t_n$ . Розыгрыш этих значений подчиним следующим правилам. Положим, что

$$\eta_{(i,j)(t_n)}^{(l)} = 0, \quad \text{если} \quad m_i^{(l)}(t_n)m_j^{(l)}(t_n) = 0,$$

т. е. при отсутствии, по крайней мере, одной из частиц в паре коагуляция не происходит. Если

$$m_i^{(l)}(t_n)m_j^{(l)}(t_n) > 0,$$

то значения случайной величины  $\eta_{(i,j)(t_n)}^{(l)}$  задаются условной функцией распределения

$$P \left\{ \eta_{(i,j)(t_n)}^{(l)} = 1 \right\} = \Phi_{m_i^{(l)}(t_n), m_j^{(l)}(t_n)},$$

$$P \left\{ \eta_{(i,j)(t_n)}^{(l)} = 0 \right\} = 1 - \Phi_{m_i^{(l)}(t_n), m_j^{(l)}(t_n)},$$

где  $0 \leq \Phi_{k_1, k_2} = \Phi_{k_2, k_1} \leq 1$  — вероятность коагуляции сталкивающейся пары частиц с массами  $k_1$  и  $k_2$ .

Если пара  $(i, j) \in \Delta$  выбрана и

$$\eta_{(i,j)(t_n)}^{(l)} = 1,$$



то значение вектора состояния  $m^{(l)}(t_n)$  преобразуется по следующему правилу:

$$\begin{aligned} m_\alpha^{(l)}(t_n) &\mapsto \bar{m}_\alpha^{(l)}(t_n) = m_\alpha^{(l)}(t_n), \quad \alpha \neq i, \\ m_i^{(l)}(t_n) &\mapsto \bar{m}_i^{(l)}(t_n) = m_i^{(l)}(t_n) + m_j^{(l)}(t_n), \\ m_j^{(l)}(t_n) &\mapsto \bar{m}_j^{(l)}(t_n) = 0. \end{aligned}$$

Если же

$$\eta_{(i,j)}^{(l)}(t_n) = 0,$$

то значения  $m_\alpha^{(l)}(t_n)$ ,  $1 \leq \alpha \leq N$ , остаются неизменными. Указанная процедура выполняется для всех пар выбранных номеров последовательным перебором значений

$$\pi_l^{(1)}(t_n), \dots, \pi_l^{(Q(N))}(t_n).$$

После проведения перечисленных розыгрышей во всех ячейках, содержащих частицы, переходим к выборочному вероятностному пространству [58, 143], в котором все построенные выше случайные величины являются независимыми без изменения их функций распределения.

Обозначим

$$F_{i,k}^{(l)}(t_n) = P\{m_i^{(l)}(t_n) = k\}.$$

Для пары  $\pi = (i, j) \in \Delta$  положим  $\min \pi = i$ ,  $\max \pi = j$ .

Рассмотрим числа заполнения ячейки  $D_l$  частицами массы  $k \in \mathbb{N}$ :

$$N_k^{(l)}(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \delta_{k, m_i^{(l)}(t_n)}.$$

Вышеуказанной процедуре розыгрыша актов коагуляции сталкивающихся частиц в ячейке  $D_l$  соответствует следующее преобразование чисел заполнения  $N_k^{(l)}(t_n) \mapsto \bar{N}_k^{(l)}(t_n)$ :

$$\begin{aligned} \bar{N}_k^{(l)}(t_n) &= N_k^{(l)}(t_n) + \sum_{(i,j) \in \Delta} \sum_{s=1}^{Q(N)} \delta_{\pi_i^{(s)}(t_n), (i,j)} \prod_{q=1}^{s-1} (1 - \delta_{\min \pi_i^{(q)}(t_n), i}) \times \\ &\quad \times (1 - \delta_{\max \pi_i^{(q)}(t_n), i}) (1 - \delta_{\min \pi_i^{(q)}(t_n), j}) (1 - \delta_{\max \pi_i^{(q)}(t_n), i}) \times \\ &\quad \times \eta_{(i,j)}^{(l)}(t_n) \left\{ \sum_{\alpha+\beta=k} \delta_{\alpha, m_i^{(l)}(t_n)} \delta_{\beta, m_j^{(l)}(t_n)} - \right. \\ &\quad \left. - \delta_{k, m_i^{(l)}(t_n)} \sum_{\beta=1}^{\infty} \delta_{\beta, m_j^{(l)}(t_n)} - \delta_{k, m_j^{(l)}(t_n)} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \delta_{\alpha, m_i^{(l)}(t_n)} \right\}. \end{aligned}$$

Все суммы здесь состоят из конечного числа ненулевых слагаемых.

**Пространственный перенос.** После завершения розыгрыша актов коагуляции во всех ячейках, содержащих частицы, осуществляется перемещение частиц между ячейками. Положим, что  $v_k \in \mathbb{Z}$  — скорость пространственного переноса частицы массы  $k \in \mathbb{N}$ . Размер пространственных ячеек  $h$  и шаг по времени  $\tau$  подчиним условию  $\tau h^{-1} = 1$ . Тогда частицы массы  $k$  за время  $\tau$  перемещаются из ячейки  $D_l$  в ячейку  $D_{l+v_k}$ . Тем самым определяется состояние системы в момент времени  $t_{n+1}$ . Очевидно,

$$N_k^{(l)}(t_{n+1}) = \bar{N}_k^{(l-v_k)}(t_n).$$

Далее вновь разыгрываются акты коагуляции, осуществляется пространственный перенос и т. д. Таким образом, полностью определена эволюция системы для всех  $t_n \geq 0$ .

Обозначим величиной  $\langle N_k^{(l)}(t_n) \rangle$  среднее число частиц массы  $k$  в ячейке  $D_l$  в момент времени  $t_n \geq 0$ . Положим

$$u_{k,N}^{(l)}(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle N_k^{(l)}(t_n) \rangle}{Nh}$$

— средняя концентрация частиц массы  $k$  в ячейке  $D_l$  в момент времени  $t_n$ .

**Теорема 5.4.** Пусть вероятность слияния частиц  $\Phi_{k_1,k_2}$  является финитной функцией, т. е.

$$\Phi_{k_1,k_2} = 0 \quad \text{при} \quad k_1 \geq M_0 \quad \text{или} \quad k_2 \geq M_0.$$

Тогда средние концентрации

$$u_{\bullet,N}^{(l)}(t_n) = \{u_{k,N}^{(l)}(t_n)\}_{k=1}^{M_0}$$

подчиняются разностному уравнению

$$u_{k,N}^{(l)}(t_{n+1}) = u_{k,N}^{(l-v_k)}(t_n) + \tau S_k^{(M_0)}(u_{\bullet,N}^{(l-v_k)}(t_n)) + \tau O(h^{-2}(N-1)^{-1}),$$

$$N \geq 2,$$

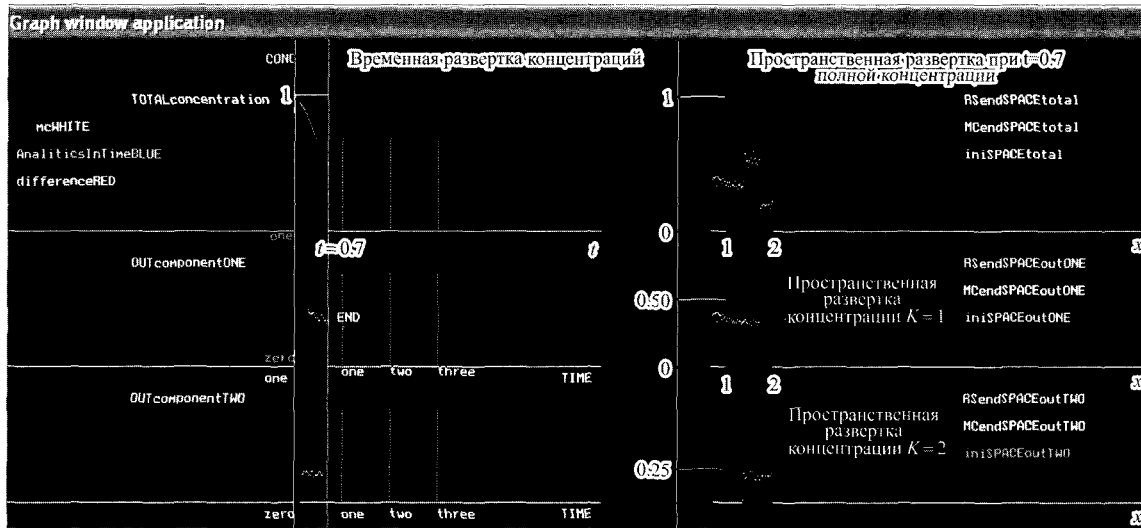
где оценка  $O$  является равномерной относительно  $t_n$ .

**Следствие 5.2.** Пусть выполнены условия теоремы 5.4 и существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_{k,N}^{(l)}(0) = u_k^{(l)}(0).$$

Предположим, что  $Q(N)/N \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ . Тогда при каждом  $t_n \geq 0$  существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_{k,N}^{(l)}(t_n) = u_k^{(l)}(t_n),$$



**Рис. 5.9.** Вычислительный эксперимент для анализа спектров распределения частиц: моделирование пространственно неоднородной коагуляции. Вероятность слияния пары сталкивающихся частиц  $\Phi = 1$ . Шаг по времени  $\tau_{AU} = 0,02$ . Шаг по пространственной области  $H = \tau_{AU} = 0,02$ . Скорость пространственного переноса  $v(k) = k$ . 2500 частиц в системе, на каждом шаге по времени в каждой ячейке по 30 000 повторных розыгрышей пар для взаимодействия с запретом выбора уже разыгранных пар на данном временном шаге. Выведены значения концентраций при  $k = 1$  и  $2$  на отрезке времени от  $0$  до  $0,7$  (слева). Справа выведена пространственная развертка значений концентраций в расчетной пространственной области от  $0$  до  $2$ . Белые точки — результат розыгрыша Монте-Карло, серые точки — расчет по разностной схеме Коши для пространственно неоднородного уравнения Смолуховского. На верхнем графике представлена суммарная концентрация частиц. При моделировании удерживались в процессе взаимодействия частицы с массами до  $20$ , а большие частицы исключались из дальнейшего взаимодействия (выпадение в осадок). Графики временной развертки компонент  $k = 1$  и  $2$  приведены в точке наблюдения  $x = 1,3$

подчиняющийся разностному уравнению

$$u_k^{(l)}(t_{n+1}) = u_k^{(l-v_k)}(t_n) + \tau S_k^{(M_0)}(u_{\bullet}^{(l-v_k)}(t_n)). \quad (5.23)$$

**Теорема 5.5.** Пусть начальные функции (5.22) являются гладкими, а начальные значения в разностном уравнении (5.23) согласованы с начальными данными (5.22) так, что

$$u_k^{(l)}(0) = u_k^0(x_l) \geq 0, \quad 1 \leq k \leq M_0. \quad (5.24)$$

Тогда при условии  $\tau h^{-1} = 1$  разностная схема (5.23), (5.24) сходится к единственному гладкому неотрицательному решению задачи Коши

$$\frac{\partial u_{k,M_0}(x,t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_{k,M_0}(x,t)}{\partial x} = S_k^{(M_0)}(u_{\bullet,M_0}(x,t)), \quad (5.25)$$

$$x \in \mathbb{R}, t \geq 0, 1 \leq k \leq M_0,$$

$$u_{k,M_0}(x,0) = u_k^0(x), \quad 1 \leq k \leq M_0, x \in \mathbb{R}. \quad (5.26)$$

**Замечание 5.7.** Методами работ [56, 40] можно показать, что в случае выполнения условий

$$0 \leq \Phi_{k_1,k_2} = \Phi_{k_2,k_1} \leq 1, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N},$$

$$\Phi_{k,k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

из последовательности решений задачи Коши (5.25), (5.26) можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к обобщенному решению задачи Коши (5.20)–(5.22).

**Замечание 5.8.** Аналогичным образом за счет выбора соотношения  $h\tau^{-1} \in \mathbb{N}$  вышеуказанные результаты можно распространить на скорости переноса с рациональными значениями.

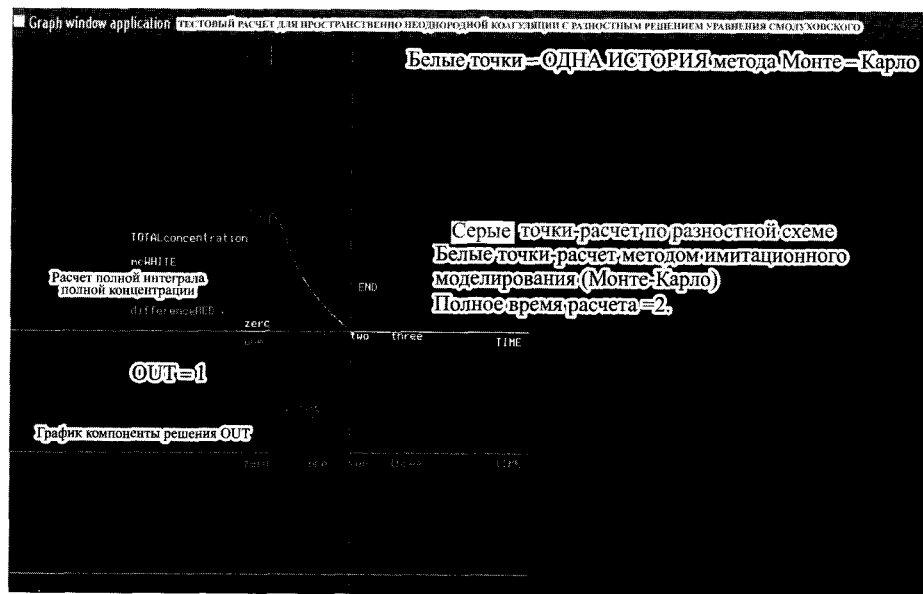
Тем самым завершается обоснование сходимости имитационного моделирования к решениям уравнения Смолуховского (5.20).

Тестирование модели пространственно неоднородной медленной коагуляции показано на рис. 5.9–5.11.

## § 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ КОАГУЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ОДНОКРАТНОГО РОЗЫГРЫША ПАРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Перейдем к рассмотрению статистического моделирования процесса пространственно неоднородной парной коагуляции (метод Монте-Карло) [58–63], основанный на рассмотренной схеме пространственно однородных взаимодействий в каждой пространственной ячейке.

Пусть в начальный момент времени  $t > 0$  рассматривается система из  $N$  частиц, находящихся на отрезке  $[0, L] \in \mathbb{R}_1$ . Положим,



**Рис. 5.10.** Вычислительный эксперимент для анализа спектров распределения частиц: расчет по программе для пространственно неоднородной коагуляции NUSM OL: 25 000 частиц, шаг по времени = шаг по пространственной = 0,01; на каждом шаге по времени повторяются розыгрыши пар сталкивающихся частиц 30 000 раз. Выбранные в паре частицы могут столкнуться, если они находятся в одной и той же пространственной ячейке. При повторном выборе частиц с номерами, которые уже выбирались на данном временном шаге, столкновения не происходит. Для сталкивающихся частиц вероятность слияния (коагуляции)  $\Phi = 1$ . Размер пространственной области 2. Скорость пространственного переноса  $v(k) = k$ . Число учитываемых масс 10;  $1 \leq k \leq 10$ ; OUT выводится в точке  $x = 13$ . Время расчета на процессоре 1,7 ГГц 8 минут

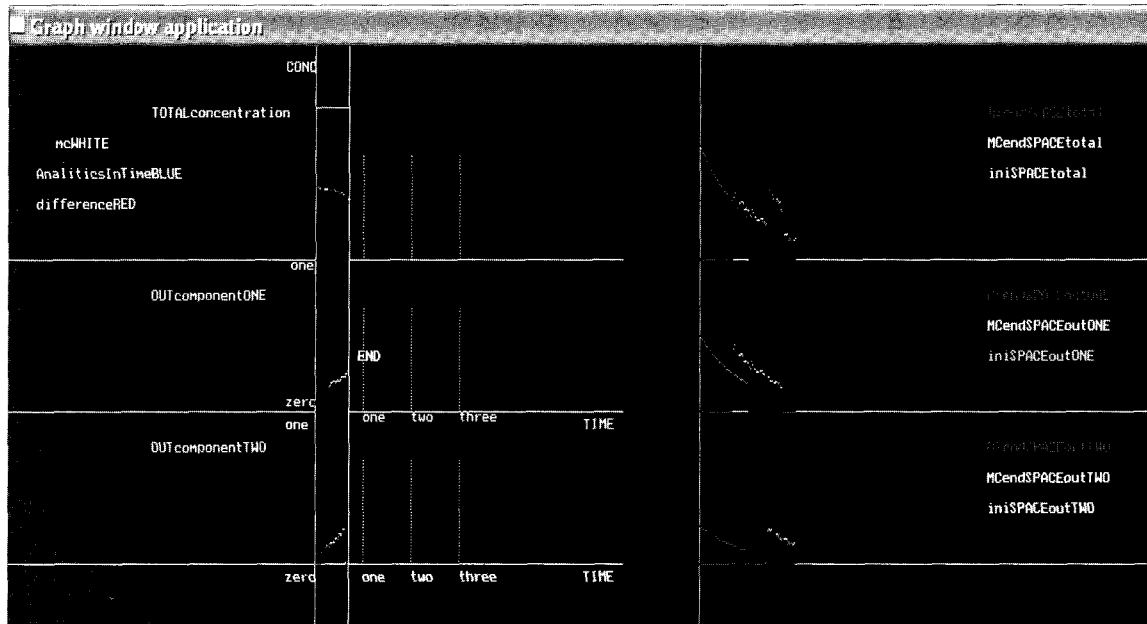


Рис. 5.11. Вычислительный эксперимент для анализа спектров распределения частиц; пространственно неоднородная коагуляция. 2500 частиц, удерживается частица с массой не более 2. Точка наблюдения  $x = 1,3$ . Скорость переноса  $v(k) = k$ . Шаг по времени и пространству 0,02. Время счета до 0,7, пространственная область от 0 до 2. Начальное распределение — экспонента по пространственным координатам до  $x = 1$ , по массе геометрическая последовательность со знаменателем 0,5. Вероятность слияния  $\Phi(k, k) = 0,5$ ;  $\Phi(k, l) = 0$  при  $k \neq l$

что каждой частице присвоен номер  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), и она имеет в момент времени  $t \geq 0$ , находясь в точке  $x_i \geq 0$  одномерного пространства  $X \in [0, L]$ , массу  $m_i(t) \in \mathbb{Z}^+$  и скорость  $v(m_i(t)) \in \mathbb{Z}^+$ .

Пусть

$$v_{\min} = \min v_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Выберем шаг по пространству  $h$  и шаг по времени  $\tau$ , исходя из следующих соображений. Положим, что вероятность коагуляции частицы массы  $k$  с частицей массы  $l$  равна

$$P = \Phi_{k,l}\tau([Nh] - 1), \quad (5.27)$$

где функция  $\Phi_{k,l}$  является интенсивностью коагуляции и подчиняется условию (5.17).

Величину  $h$  подчиним соотношению

$$0 < h \leq \sqrt{\frac{v_{\min}}{N \|\Phi_2\|_0}}.$$

Величину  $\tau = \tau(v_{\min}, N)$  назовем временем столкновения и подчиним соотношению

$$0 < \tau \leq \frac{1}{\sqrt{v_{\min} N \|\Phi_2\|_0}}.$$

Разобьем координатное пространство  $X$  на интервалы (ячейки) длины  $h$  каждый. Таким образом, получим  $[L/h]$  интервалов, где неравенство  $0 < h < L < \infty$  представляет область, в которой происходит розыгрыш случайного взаимодействия частиц. В каждый из интервалов положим

$$0 \leq N_k \leq [Nh], \quad k \in \left[1, \dots, \left[\frac{L}{h}\right]\right]$$

частиц ненулевой массы, причем в начальный момент времени  $t = 0$  справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{[L/h]} N_k = N.$$

Дополним каждый из интервалов покоящимися частицами с нулевой массой так, чтобы в каждом из интервалов было  $[Nh]$  частиц.

Алгоритм пространственно неоднородной коагуляции организуем с учетом свободного переноса частиц и будем проводить по следующей схеме.

В каждой из ячеек разыгрываем одно столкновение по алгоритму пространственно однородной коагуляции лишь с теми отличиями,

что вероятность слияния пары частиц определяется формулой (5.27), а выборка очередной пары осуществляется с вероятностью

$$P(\pi = \pi_{i,j}) = \frac{1}{C_{[Nh]}^2}.$$

Пространственный перенос частиц после очередного розыгрыша по всем ячейкам подчиним преобразованию

$$x'_{k_i} = x_{k_i} + v_{k_i}\tau, \quad i \in 1, \dots, N_k,$$

где  $x_{k_i}, v_{k_i}$  — координата и скорость соответственно  $i$ -й частицы в  $k$ -й ячейке пространства  $L$ . Концентрации  $u_l(t, x)$  частиц массы  $m_l \in [1, \dots, M]$  вычислим по формуле

$$u_l(t, x) = \frac{N_l}{[Nh]},$$

где  $N_l$  — количество частиц массы  $m_l$  в момент времени  $t = q\tau$ ,  $q \in \mathbb{Z}^+$  в ячейке с координатой  $x = ph$ ,  $p \in \mathbb{Z}^+$ .

**Тестирование алгоритма и вычислительный эксперимент.** В тестовом примере значения скоростей переноса положим  $v_i = i$ , где  $i = 1, 2$ . Тогда уравнение Смолуховского приобретает следующий вид:

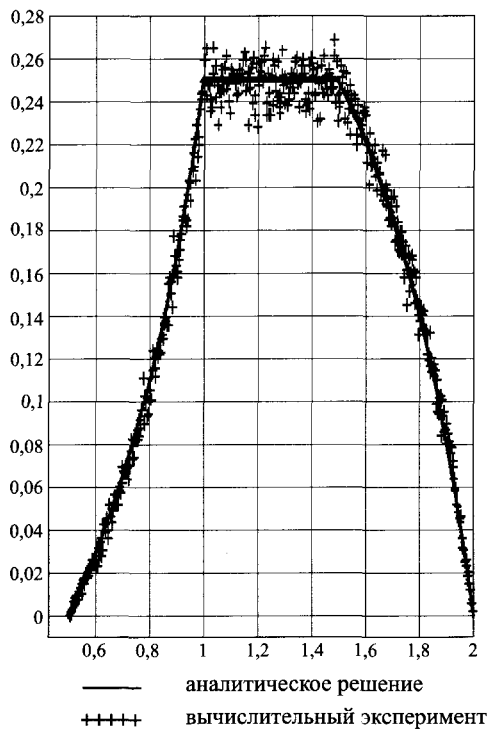
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = -2\Phi_{1,1}u_1^2 - 2\Phi_{1,2}u_1u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + 2\frac{\partial u_2}{\partial x} = \Phi_{1,1}u_1^2 - 2\Phi_{1,2}u_1u_2 - 2\Phi_{2,2}u_2^2, \\ t \geq 0, \quad |x| < \infty. \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Ядро взаимодействия  $\Phi_{i,j}$  и начальные условия задаем следующими соотношениями:

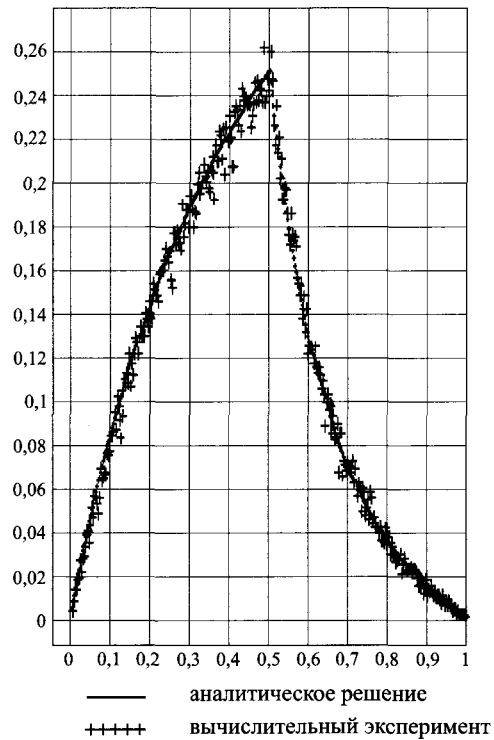
$$\begin{aligned} \Phi_{1,1} &= 1, \quad \Phi_{1,2} = \Phi_{2,2} = 0, \\ \varphi_1(x) &= \theta(x)\theta(1-x), \quad |x| < \infty, \\ \varphi_2(x) &= 0, \quad |x| < \infty. \end{aligned} \quad (5.29)$$

В этой модели частицы массы  $m_1 = 1$  «расходятся на рождение» частиц массы  $m_2 = 2$ , которые движутся в свою очередь со скоростью  $v_2 = 2$ , т. е. в два раза быстрее своих «родителей».





**Рис. 5.12.** Математическое моделирование задачи (5.28), (5.29): 10 историй, 100 тыс. частиц. Сечение  $u_2(t)$  при  $x = 0.5$



**Рис. 5.13.** Математическое моделирование задачи (5.28), (5.29): 10 историй, 100 тыс. частиц. Сечение  $u_2(t)$  при  $x = 1$

Аналитическое решение задачи Коши (5.29) имеет следующий вид:

$$u_1(t, x) = \frac{\theta(1 - (x - t))\theta(x - t)}{2t + 1},$$

$$u_2(t, x) = \begin{cases} 0, & x < t, \\ \frac{x - t}{(1 + 4t - 2x)(1 + 2t)}, & t < x < t + 1, x < 2t, \\ \frac{t}{1 + 2t}, & t < x < t + 1, x > 2t, \\ \frac{1}{4(2t - x + 1)(2t - x + 1) - 1}, & x > t + 1, x < 2t, \\ \frac{2t - x + 1}{3 + 4t - 2x}, & x > t + 1, 2t < x < 2t + 1, \\ 0, & x > 2t + 1, \end{cases}$$

где  $t \geq 0$ . На основе вышеизложенного алгоритма имитации слияний частиц для пространственно неоднородного случая была реализована программа на ЭВМ. Вычислительный эксперимент для задачи Коши дает результат, согласующийся с аналитическими решениями. Следует отметить, что дисперсия в эксперименте не превышает 1%. На рис. 5.12 и 5.13 сопоставлены графики аналитических выражений и результатов прямого численного эксперимента для задачи (5.28), (5.29).

Аналогичный вычислительный эксперимент для системы (5.28) проводится при следующих условиях на ядро взаимодействия и начальные данные:

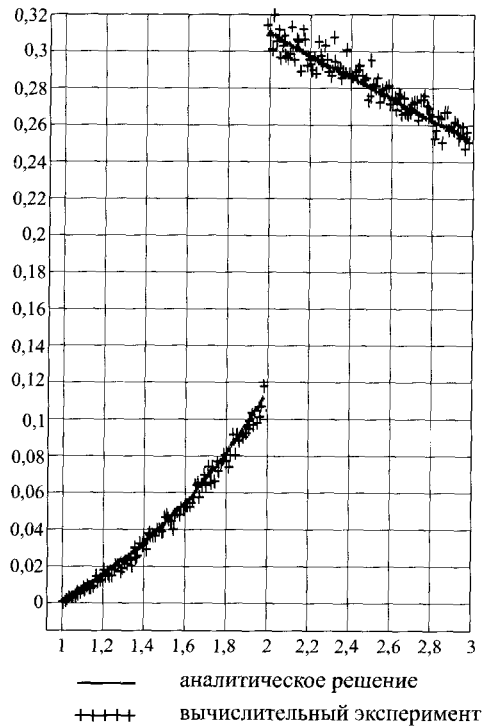
$$\begin{aligned} \Phi_{1,1} = \Phi_{2,2} = 1, \Phi_{1,2} = 0, \\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \frac{1}{2}\theta(x)\theta(1 - x), \quad |x| < \infty. \end{aligned} \tag{5.30}$$

На рис. 5.14, 5.15 сопоставляются графики аналитических выражений для концентраций с результатами имитационного моделирования задачи (5.28), (5.30).

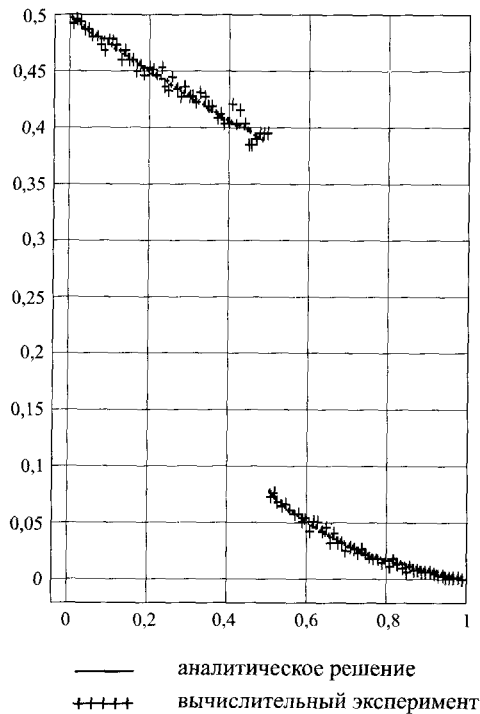
Рассмотрим систему (5.28), начальные условия и интенсивность коагуляции положим соответственно

$$\begin{aligned} \Phi_{m_1, m_2} = |m_1 - m_2|, \\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \frac{1}{2}\theta(x)\theta(1 - x), \quad |x| < \infty. \end{aligned} \tag{5.31}$$

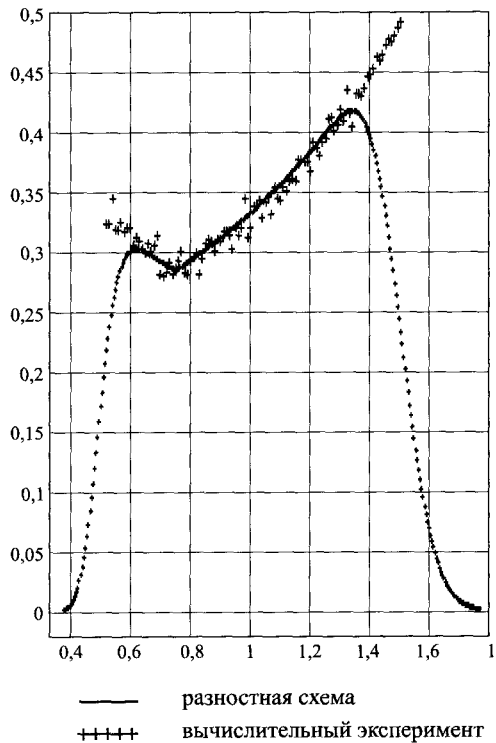
На рис. 5.16 сравниваются результаты имитационного алгоритма для задачи (5.28), (5.31) с решениями, полученными с помощью разностной схемы (5.23).



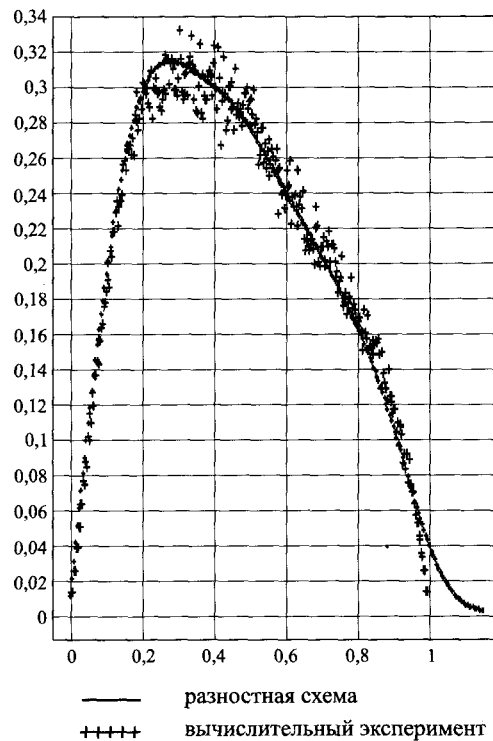
**Рис. 5.14.** Математическое моделирование задачи (5.28), (5.30): 10 историй, 100 тыс. частиц. Сечение  $u_2(t)$  при  $x = 1$



**Рис. 5.15.** Математическое моделирование задачи (5.28), (5.30): 10 историй, 100 тыс. частиц. Сечение  $u_2(t)$  при  $x = 1$



**Рис. 5.16.** Математическое моделирование задачи (5.28), (5.31). 20 историй, 10 тыс. частиц. Сечение  $u_1(t)$  при  $x = 1.5$



**Рис. 5.17.** Математическое моделирование задачи (5.28), (5.32). 20 историй, 10 тыс. частиц. Сечение  $u_1(t)$  при  $x = 1$

Для системы (5.28) начальные условия и интенсивность коагуляции положим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{m_1, m_2} &= m_1 + m_2, \\ \varphi_1(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases} \\ \varphi_2(x) &= 0, \quad |x| < \infty. \end{aligned} \quad (5.32)$$

На рис. 5.17 сопоставлены результаты прямого численного моделирования с решениями задачи (5.28), (5.32), полученными с помощью разностной схемы (3.5), (3.6).

На основе анализа полученных данных можно сделать вывод о наличии достаточно хорошего согласования между результатами предложенного алгоритма прямого имитационного моделирования и аналитическими решениями задачи Коши для уравнения Смолуховского пространственно неоднородной коагуляции.

## § 6. РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО С ИСТОЧНИКОМ ЧАСТИЦ

Рассмотрим случай, когда в системе коагулирующих частиц действует внешний источник, поставляющий в нее частицы с интенсивностью  $q^{(\omega)}(t) \geq 0$ , что учитывается добавлением этой величины в правую часть уравнения Смолуховского (5.1):

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(t)}{\partial t} = S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(t)) + q^{(\omega)}(t), \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+, \quad t > 0, \quad (5.33)$$

где  $S$  — оператор Смолуховского (1.8), (1.9), а  $q^{(\omega)}(t) \geq 0$  — плотность источника частиц такая, что  $q^{(\omega)}(t) \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $q \in L_1^{(T)}$  и при этом ядро  $\Phi \in \mathcal{K}_\gamma$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ , в соответствии с теоремой 5.1 в случае дискретных масс (для непрерывных масс см. гл. 7). К уравнению (5.33) добавим начальные данные

$$u^{(\omega)}|_{t=0} = u_0^{(\omega)}, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+. \quad (5.34)$$

Дополнительно к требованиям, накладываемым на начальную функцию  $u_0$  в этих главах, потребуем выполнение условия непосредственной интегрируемости, а именно, будем всюду в этом разделе

предполагать, что значения сеточной нормы

$$\|u_0\|_{l_1} \stackrel{\text{def}}{=} h \sum_{i=0}^{\infty} u_0^{(\omega_i)}, \quad h = \omega_{i+1} - \omega_i, i = 0, 1, \dots,$$

стремятся к  $\|u_0^{(\cdot)}\|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)}$  при  $h \rightarrow 0$ . Такие же предположения распространяются на источник частиц  $q$  по переменной  $\omega$ .

**Лемма 5.3.** Пусть  $u_0^{(\omega)} \geq 0$ ,  $u_0^{(\omega)} \in L_1(\mathbb{R}_1^+)$ , а плотность источника частиц  $q$  такая, что  $q^{(\omega)}(t) \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $q \in L_1^T$ . Тогда решение задачи Коши (5.33), (5.34) неотрицательно и ограничено при  $t \in [0, T]$ , причем выполнено неравенство

$$\|u^{(\cdot)}\|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)} \leq \|u_0^{(\cdot)}\|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)} + QT,$$

где  $Q = \|q\|^{(T)}$ .

Доказательство указанных свойств решения задачи (5.33), (5.34) полностью повторяет случай  $q = 0$ , который детально рассматривается в гл. 7, и поэтому мы его опускаем.

Следующая разностная схема задает приближенный численный метод решения задачи Коши (5.33), (5.34):

$$\begin{cases} \frac{u_{\alpha}^{(\omega_i)}(t + \tau) - u_{\alpha}^{(\omega_i)}(t)}{\tau} = S_h^{(\omega_i)}(u_{\alpha}^{(\cdot)}(t)) + q_n^{(\omega_i)}, \\ t \in \mathbb{R}_1^+, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+, \\ u_{\alpha}^{(\omega_i)}(t) = u_0^{(\omega_i)}, \quad 0 \leq t < \tau, \end{cases} \quad (5.35)$$

где сеточный оператор Смолуховского

$$S_h^{(\omega_i)}(u_{\alpha}^{(\cdot)}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{(\omega_i-h)/h} h\Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) u_{\alpha}^{(\omega_i-\omega_j)}(t) u_{\alpha}^{(\omega_j)}(t) - \sum_{j=0}^M h\Phi(\omega_i, \omega_j) u_{\alpha}^{(\omega_i)}(t) u_{\alpha}^{(\omega_j)}(t);$$

$h$  — шаг сетки по переменной  $\omega$ ,  $h > 0$ ,

$$M = \left\lceil \frac{N}{h} \right\rceil, \quad 0 \leq i \leq M;$$

$\tau$  — шаг сетки по переменной  $t$ ,  $\tau > 0$ ;

$$u_{\alpha}^{(\omega)}(t) = u_{\alpha}^{(\omega_i)}(n\tau) \quad \text{при} \quad \omega_i \leq \omega \leq \omega_{i+1}, \quad n\tau \leq t < (n+1)\tau,$$

$$K = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil, \quad 0 \leq n \leq K - 1,$$

$\alpha = (\tau, h)$  — параметры разностного метода.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(t)}{\partial t} = S_N^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(t)) + q^{(\omega)}(t), \quad \omega \in [0, N], t > 0, \quad (5.36)$$

$$u^{(\omega)}|_{t=0} = u_0^{(\omega)}, \quad (5.37)$$

где оператор

$$S_N^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\omega \Phi(\omega - \omega_1, \omega_1) u^{(\omega - \omega_1)}(t) u^{(\omega_1)}(t) d\omega_1 - \\ - u^{(\omega)}(t) \int_0^N \Phi(\omega, \omega_1) u^{(\omega_1)} d\omega_1, \quad 0 \leq \omega \leq N.$$

**Лемма 5.4.** Пусть выполнены условия леммы 5.3. Тогда при любом натуральном  $N$  для решения задачи (5.36), (5.37) выполнены оценки, приведенные в лемме 5.3, которые равномерны по номеру  $N \in \mathbb{N}$ .

Доказательство этого утверждения полностью повторяет соответствующие рассуждения в лемме 5.3, так как  $S_N$  является оператором больцмановского типа.

Покажем, что разностная схема (5.35) аппроксимирует вспомогательную задачу (5.36), (5.37).

Обозначим  $u_n^{(\omega_i)} = u_\alpha^{(\omega_i)}(n\tau)$ , где  $u_\alpha^{(\omega_i)}(n\tau)$  — решение разностной схемы (5.35) на  $n$ -м шаге по времени.

Для удобства дальнейших рассуждений продолжим область определения аргументов  $\omega$  в операторе  $S_N$  на все неотрицательные числа, полагая его равным тождественному нулю вне отрезка  $[0, N]$ . Положим

$$Lu^{(\omega)} = \begin{cases} \frac{\partial u^{(\omega)}}{\partial t} - S_N^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(t)), & t > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+, \\ u^{(\omega)}(0), & \omega \in \mathbb{R}_1^+, \end{cases}$$

$$f^{(\omega)} = \begin{cases} q^{(\omega)}(t), & t > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+, \\ u_0^{(\omega)}, & \omega \in \mathbb{R}_1^+. \end{cases}$$

Тогда задачу (5.36), (5.37) можно записать в виде

$$Lu^{(\omega)} = f^{(\omega)}, \quad t > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+.$$

Кроме того, положим

$$L^\alpha u_\alpha = \begin{cases} \frac{u_{n+1}^{(\omega_i)} - u_n^{(\omega_i)}}{\tau} - S_h^{(\omega_i)}(u_n^{(\cdot)}), & 0 \leq n \leq K, \quad 0 \leq i \leq M, \\ u^{(\omega_i)}(t), & 0 \leq t < \tau, \end{cases}$$

$$f^\alpha = \begin{cases} q_n^{(\omega_i)}, \\ u_0^{(\omega_i)}, \end{cases} \quad 0 \leq i \leq M.$$

Тогда разностная схема (5.35) может быть переписана в виде

$$L^\alpha u_\alpha = f^\alpha. \tag{5.38}$$

В качестве сетки  $D_\alpha$  выберем совокупность точек пересечения прямых

$$t = n\tau, 0 \leq n \leq K, \quad \omega = ih, 0 \leq i \leq M,$$

где  $\tau, h > 0$ .

Пусть  $U^\alpha$  — пространство функций, определенных на сетке  $D_\alpha$ ,

$$\|u_\alpha\|_{U^\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{D_\alpha} |u_n^{(\omega_i)}|.$$

Обозначим  $F_1^\alpha$  — линейное пространство, состоящее из элементов

$$g^\alpha = \begin{pmatrix} \varphi^\alpha \\ \psi^\alpha \end{pmatrix}$$

с конечной нормой

$$\|g^\alpha\|_{F_1^\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i,n} |\varphi^\alpha| + \max_i |\psi^\alpha|.$$

Правая часть  $f^\alpha$  разностной схемы (5.38) принадлежит пространству  $F^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} L_\alpha(U_1^\alpha)$  — образу разностного оператора, который, вообще говоря, не является линейным подпространством в  $F_1^\alpha$ . Здесь

$$U_1^\alpha = \{u_\alpha \in U^\alpha : u_\alpha \geq 0\}.$$

Множество  $F^\alpha$  снабжено индуцированной метрикой, которая порождена нормой  $\|\cdot\|_{F_1^\alpha}$ :

$$\rho_{F^\alpha}(g^\alpha, g_1^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \|g^\alpha - g_1^\alpha\|_{F_1^\alpha}.$$

Поскольку в классической теории разностных схем [70] определения устойчивости и аппроксимации разностной схемы сформулированы для нормированного пространства  $F^\alpha$ , переформулируем указанные определения для рассматриваемого случая метрических пространств (не являющихся в нашем случае линейными нормируемыми пространствами).



Обозначим через  $[u]_{D_\alpha}$  оператор сужения точного решения  $u$  дифференциальной задачи (5.36), (5.37) на сетку  $D_\alpha$ .

**Определение 5.3.** Разностная схема (5.38) аппроксимирует дифференциальную задачу, если невязка

$$\rho_{F^\alpha}(L_\alpha[u]_{D_\alpha}, f^\alpha) \rightarrow 0$$

при  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ .

**Определение 5.4.** Разностная схема (5.38) называется *устойчивой* на подмножестве  $\tilde{F}_\alpha \subset F^\alpha$ , если существуют такие числа  $\tau_0, h_0$ , что при параметрах сетки  $\tau < \tau_0, h < h_0$  и исходных данных  $f^\alpha$ , принадлежащих  $\tilde{F}_\alpha$ , существует единственное решение разностной задачи (5.38), а для любых  $f_1^\alpha, f_2^\alpha \in \tilde{F}_\alpha$ , находящихся в замкнутом шаре радиуса  $r > 0$  с центром в  $f^\alpha = 0$ , выполняется неравенство

$$\|v_\alpha^{(\cdot)} - u_\alpha^{(\cdot)}\|_{U^\alpha} \leq C \rho_{F^\alpha}(f_1^\alpha, f_2^\alpha),$$

где  $v_n^{(\omega_i)}$  и  $u_n^{(\omega_i)}$  — решения разностной схемы (5.38), соответствующие сеточным исходным данным  $f_1^\alpha$  и  $f_2^\alpha$ ,  $C$  — постоянная, зависящая от величин  $\tau_0, h_0, r$ .

**Замечание 5.9.** Столь сложное определение устойчивости обусловлено тем, что разностные схемы для нелинейных задач физической кинетики обладают хорошими свойствами только при наличии неотрицательности решения, а в противном случае развивается вычислительная неустойчивость, связанная, вообще говоря, с некорректностью задачи Коши при отрицательных (знакопеременных) исходных данных (начальной функции, источнике или ядре).

Для уравнения Смолуховского с источником множество  $\tilde{F}_\alpha$  состоит из векторов с неотрицательными компонентами, которые принадлежат пространству  $l_1$  при каждом  $n$ .

Сходимость разностной схемы понимается в обычном смысле [70], а именно, погрешность приближения сужения точного решения  $[u]_{D_\alpha}$  на сетке  $D_\alpha$  разностным решением  $u_\alpha$  такова, что

$$\max_{D_\alpha} |u_\alpha - [u]_{D_\alpha}| \rightarrow 0$$

при  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ .

Понятия порядка аппроксимации и порядка точности разностной схемы аналогичны определениям в [70].

В рамках сделанных определений сформулируем теорему, которая доказывается дословным повторением соответствующей классической теоремы о сходимости разностных схем [70], и поэтому ее доказательство не приводится.

**Теорема 5.6.** *Если разностная задача (5.38) аппроксимирует дифференциальную задачу и устойчива на множестве  $\tilde{F}_\alpha$ , то разностное решение  $u_\alpha$  сходится к решению  $u$  дифференциальной задачи.*

Таким образом, для доказательства сходимости решения разностной схемы (5.38) к решению задачи (5.36), (5.37) достаточно доказать устойчивость (5.38) и то, что она аппроксимирует дифференциальную задачу на  $\tilde{F}_\alpha$ .

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

**Лемма 5.5.** *Пусть выполнены условия леммы 5.1, а шаг по времени  $\tau > 0$  подчинен требованию*

$$\tau : \tau \leq \frac{1}{\sup_{\omega, \omega_1 \leq N} \Phi(\omega, \omega_1) (\|u_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + Q_h^{(T)} T)}. \quad (5.39)$$

Тогда решение разностной схемы (5.38) на любом шаге по времени  $n\tau \leq T$  ограничено и неотрицательно, причем выполнено следующее соотношение:

$$\|u_n^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|u_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + Q_h^{(T)} T, \quad (5.40)$$

где величина  $Q_h^{(T)} T$  определена формулой

$$Q_h^{(T)} = \|[q]_{D_\alpha}\|_{l_1}^{(T)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq n \leq K} \|q^{(\cdot)}(n\tau)\|_{l_1}$$

— сеточная норма источника.

□ Для доказательства применим метод математической индукции по номеру  $n$ , т. е. по времени. Ограниченность и неотрицательность  $u_0^{(\omega_i)}$  следуют из условия леммы.

Пусть утверждение леммы верно для всех  $n: 0 \leq n \leq n^* < K$ . Покажем, что утверждение леммы верно для  $n = n^* + 1$ . Из (5.38) следует равенство

$$u_{n^*+1}^{(\omega_i)} = u_{n^*}^{(\omega_i)} + \tau (S_h^{(\omega_i)}(u_{n^*}^{(\cdot)}) + q_n^{(\omega_i)}).$$

Отбросив в правой части равенства неотрицательные слагаемые, получаем

$$u_{n^*+1}^{(\omega_i)} \geq u_{n^*}^{(\omega_i)} - \tau \sum_{j=0}^M h \Phi(\omega_i, \omega_j) u_{n^*}^{(\omega_i)} u_{n^*}^{(\omega_j)}.$$

Воспользовавшись тем, что

$$\Phi(\omega, \omega_1) \leq \sup_{\omega, \omega \leq N} \Phi(x, y) = C,$$

а также тем, что в силу неотрицательности  $u_{n^*}^{(\omega_i)}$  справедливо соотношение

$$\|u_{n^*}^{(\cdot)}\|_{l_1} = \sum_{j=0}^M h u_{n^*}^{(\omega_j)},$$

имеем

$$u_{n^*+1}^{(\omega_i)} \geq u_{n^*}^{(\omega_i)} \left(1 - \tau C \|u_{n^*}^{(\cdot)}\|_{L_1(\mathbb{R}_+^*)}\right). \quad (5.41)$$

Из (5.38) получаем

$$u_{n^*}^{(\omega_i)} = u_{n^*-1}^{(\omega_i)} + \tau \left( S_h^{(\omega_i)}(u_{n^*-1}^{(\cdot)}) + q_n^{(\omega_i)} \right).$$

Просуммировав обе части этого равенства по  $i$  и умножив их на  $h$ , имеем

$$\sum_{i=0}^M h u_{n^*}^{(\omega_i)} = \sum_{i=0}^M h u_{n^*-1}^{(\omega_i)} + \tau \left( \sum_{i=0}^M h S_h^{(\omega_i)}(u_{n^*-1}^{(\cdot)}) + \sum_{i=0}^M h q_n^{(\omega_i)} \right).$$

Учитывая неотрицательность  $u_n^{(\omega_i)}$  при  $n: 0 \leq n \leq n^*$ , а также наличие свойства диссипативности оператора  $S$  на неотрицательных функциях, что означает выполнение неравенства

$$\sum_{i=0}^M h S_h^{(\omega_i)}(u_{n^*-1}^{(\cdot)}) \leq 0,$$

устанавливаем

$$\|u_{n^*}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|u_{n^*-1}^{(\cdot)}\|_{l_1} + \tau Q_h^{(T)}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|u_{n^*}^{(\cdot)}\|_{l_1} &\leq \|u_{n^*-1}^{(\cdot)}\|_{l_1} + \tau Q_h^{(T)} \leq \dots \leq \|u_1^{(\cdot)}\|_{l_1} + \tau(n^* - 1)Q_h^{(T)} \leq \\ &\leq \|u_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + \tau n^* Q_h^{(T)}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$\|u_{n^*}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|u_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + \tau n^* Q_h^{(T)}$$

и, таким образом, для всех рассматриваемых значений номера  $n$

$$\|u_n^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|u_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + T Q_h^{(T)}. \quad (5.42)$$

По индукционному предположению  $u_{n^*}^{(\omega_i)} \geq 0$ . Тогда из (5.41) следует, что  $u_{n^*+1}^{(\omega_i)} \geq 0$ , если выполнено условие

$$\tau: \tau \leq \frac{1}{\sup_{\omega, \omega_1 \leq N} \Phi(\omega, \omega_1) \|u_{n^*}^{(\cdot)}\|_{l_1}},$$

которое обеспечивается (5.39) и соотношением (4.32). Таким образом, доказана неотрицательность  $u_{n^*+1}^{(\omega_i)}$ .

Докажем теперь ограниченность  $u_{n^*+1}^{(\omega_i)}$ . Воспользовавшись предыдущими рассуждениями и учитывая доказанную неотрицательность  $u_{n^*+1}^{(\omega_i)}$ , получаем

$$\|u_{n^*+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|u_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + TQ_h^{(T)},$$

что также означает ограниченность  $u_{n^*+1}^{(\omega_i)}$ .

Таким образом, утверждение леммы верно для  $n = n^* + 1$ , а значит, для всех рассматриваемых значений  $n$ . Лемма доказана. ■

Перейдем к доказательству устойчивости разностной схемы (5.38).

**Теорема 5.7.** Разностная схема (5.38) устойчивая на  $\tilde{F}_\alpha$ , причем

$$\sup_n \|v_n^{(\cdot)} - u_n^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq (\|b^{(\cdot)} - a^{(\cdot)}\|_{l_1} + T\|q_b - q_a\|_{l_1}^{(T)}) \exp(C_2 T), \quad (5.43)$$

где  $v_n^{(\omega_i)}$  и  $u_n^{(\omega_i)}$  — решения разностной схемы (4.28), соответствующие исходным данным

$$f_a^\alpha = (a^{(\omega_i)}, q_a) \quad \text{и} \quad f_b^\alpha = (b^{(\omega_i)}, q_b),$$

которые принадлежат  $\tilde{F}^\alpha$ .

□ Доказательство существенно использует неотрицательность разностного решения, что приводит к выполнению оценки (5.40), если имеет место (5.39).

В силу ограниченности решения разностной схемы (5.38) на каждом шаге существование и единственность ее решения очевидны. Таким образом, для доказательства устойчивости (5.38) достаточно доказать справедливость неравенства

$$\|v_\alpha^{(\cdot)} - u_\alpha^{(\cdot)}\|_{U^\alpha} \leq C \rho_{F^\alpha}(f_a^\alpha, f_b^\alpha).$$

Покажем справедливость неравенства (5.43).

По лемме 4.6 функции  $v_\alpha^{(\cdot)}$ ,  $u_\alpha^{(\cdot)}$  неотрицательны и ограничены в норме пространства  $l_1$ .

Составим их разность и обозначим ее  $z_n^{(\omega_i)}$ :

$$z_n^{(\omega_i)} = v_n^{(\omega_i)} - u_n^{(\omega_i)}, \quad \text{где } 0 \leq n \leq K, \quad 0 \leq i \leq M,$$

причем

$$z_0^{(\omega_i)} = b^{(\omega_i)} - a^{(\omega_i)}.$$

Положим

$$\Delta q = q_b - q_a.$$

Тогда, воспользовавшись (5.38) для  $z_n^{(\omega_i)}$ , получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{z_{n+1}^{(\omega_i)} - z_n^{(\omega_i)}}{\tau} &= S_h^{(\omega_i)}(v_n^{(\cdot)}) - S_h^{(\omega_i)}(u_n^{(\cdot)}) + \Delta q_n^i, \\ 0 &\leq i \leq M, \quad 0 \leq n \leq K, \\ z_0^{(\omega_i)} &= b^{(\omega_i)} - a^{(\omega_i)}, \quad 0 \leq i \leq M. \end{aligned} \quad (5.44)$$

В силу симметричности ядра  $\Phi(\omega, \omega_1)$ , имеем

$$\begin{aligned} &S_h^{(\omega_i)}(v_n^{(\cdot)}) - S_h^{(\omega_i)}(u_n^{(\cdot)}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{(\omega_i-h)/h} h\Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) \{ (u_n^{(\omega_i-\omega_j)} + v_n^{(\omega_i-\omega_j)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \} + \\ &+ \sum_{j=0}^M h\Phi(\omega_i, \omega_j) \{ (u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_i)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Из (5.44) следует, что

$$z_{n+1}^{(\omega_i)} = z_n^{(\omega_i)} + \tau(S_h^{(\omega_i)}(v_n^{(\cdot)}) - S_h^{(\omega_i)}(u_n^{(\cdot)})) + \tau\Delta q_n^i.$$

Тогда, учитывая (5.45), получаем

$$\begin{aligned} |z_{n+1}^{(\omega_i)}| &\leq |z_n^{(\omega_i)}| + \tau \left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{(\omega_i-h)/h} h\Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) \times \right. \\ &\times \{ (u_n^{(\omega_i-\omega_j)} + v_n^{(\omega_i-\omega_j)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \} + \\ &+ \left. \sum_{j=0}^M h\Phi(\omega_i, \omega_j) \{ (u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_i)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \} \right| + \tau|\Delta q_n^i|. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Умножая обе части полученного неравенства на  $h$  и суммируя по  $i: 0 \leq i \leq M$ , выводим

$$\begin{aligned} & \|z_{n+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|z_n^{(\cdot)}\|_{l_1} + \\ & + \tau \left| \frac{1}{2} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{(\omega_i-h)/h} h^2 \Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) \times \right. \\ & \times \left. \{ (v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) (v_n^{(\omega_i-\omega_j)} + u_n^{(\omega_i-\omega_j)}) \} \right. \\ & + \left. \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M h^2 \Phi(\omega_i, \omega_j) \{ (u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_i)}) (v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \} \right| + \tau \|\Delta q_n\|_{l_1}; \\ & \|z_{n+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|z_n^{(\cdot)}\|_{l_1} + \\ & + \tau \left| \frac{1}{2} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M h^2 \Phi(\omega_i, \omega_j) \{ (u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_i)}) (v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \} \right| + \tau \|\Delta q_n\|_{l_1}; \\ & \|z_{n+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|z_n^{(\cdot)}\|_{l_1} + \\ & + \frac{\tau}{2} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M h^2 \Phi(\omega_i, \omega_j) |u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_j)}| \cdot |v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}| + \tau \|\Delta q_n\|_{l_1}; \\ & \|z_{n+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|z_n^{(\cdot)}\|_{l_1} \left( 1 + \frac{\tau C}{2} (\|u_n^{(\cdot)}\|_{l_1} + \|v_n^{(\cdot)}\|_{l_1}) \right) + \tau \|\Delta q_n\|_{l_1}, \quad (5.47) \end{aligned}$$

где постоянная

$$C = \sup_{0 \leq \omega, \omega_1 \leq N} \Phi(\omega, \omega_1).$$

Воспользовавшись неравенством (5.42), имеем

$$\begin{aligned} & \|z_{n+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|z_n^{(\cdot)}\|_{l_1} \times \\ & \times (1 + \tau C \max(\|a^{(\cdot)}\|_{l_1} + Q_h^{(T)} T, \|b^{(\cdot)}\|_{l_1} + Q_h^{(T)} T)) + \tau \|\Delta q_n\|_{l_1}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$C_2 = C \max(\|a^{(\cdot)}\|_{l_1} + Q_h^{(T)} T, \|b^{(\cdot)}\|_{l_1} + Q_h^{(T)} T),$$

получаем

$$\|z_{n+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq \|z_n^{(\cdot)}\|_{l_1} (1 + \tau C_2) + \tau \|\Delta q_n\|_{l_1}.$$

По индукции

$$\begin{aligned} & \|z_{n+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq (\|z_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + n\tau\Delta Q)(1 + \tau C_2)^n, \\ & \|z_{n+1}^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq (\|z_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + T\Delta Q)(1 + \tau C_2)^{t/\tau}, \quad \Delta Q = \max_m \|\Delta q_m\|_{l_1}. \end{aligned}$$

Устремляя  $\tau$  к нулю и учитывая, что  $(1 + \tau C_2)^{t/\tau}$  монотонно возрастая стремится к  $\exp(C_2 t)$ ,  $t \geq 0$ , имеем

$$\|z_n\|_{l_1} \leq (\|z_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + T\Delta Q) \exp(C_2 T).$$

Тогда

$$\max_{0 \leq n \leq K} \|z_n^{(\cdot)}\|_{l_1} \leq (\|z_0^{(\cdot)}\|_{l_1} + T\Delta Q) \exp(C_2 T),$$

т. е. справедливо неравенство (5.43), сформулированное в теореме.

Перейдем теперь к устойчивости разностной схемы (5.38) в пространствах  $U^\alpha$ ,  $F^\alpha$ .

Повторяя процесс получения неравенств (5.46), (5.47), приходим к следующим соотношениям:

$$|z_{n+1}^{\omega_i}| \leq \max_i |z_n^{\omega_i}| \cdot \left(1 + \frac{3\tau C}{2} \|u_n^{(\cdot)} + v_n^{(\cdot)}\|_{l_1}\right) + \tau \max_i |\Delta q_n^i|.$$

Учитывая здесь неравенство (5.40), заключаем

$$|z_{n+1}^{\omega_i}| \leq \max_i |z_n^{\omega_i}| \cdot (1 + \tau C_3) + \tau \max_i |\Delta q_n^i|,$$

где постоянная определяется выражением

$$C_3 = 3C \max(\|a^{(\cdot)}\|_{L_1(\mathbb{R}_+^*)} + QT, \|b^{(\cdot)}\|_{L_1(\mathbb{R}_+^*)} + QT).$$

Таким образом,

$$\max_i |z_{n+1}^{(\omega_i)}| \leq \max_i |z_n^{(\omega_i)}| (1 + \tau C_3) + \tau \max_i |\Delta q_n^i|.$$

Продолжая оценки по индукции, получаем

$$\max_i |z_n^{(\omega_i)}| \leq (\max_i |z_0^{(\omega_i)}| + n\tau \max_{i,m} |\Delta q_n^i|) (1 + \tau C_3)^n,$$

и, следовательно,

$$\sup_n \max_i |z_n^{(\omega_i)}| \leq (\max_i |z_0^{(\omega_i)}| + T \max_{i,m} |\Delta q_n^i|) \exp(C_3 T),$$

что влечет выполнение соотношения

$$\|v_\alpha^{(\cdot)} - u_\alpha^{(\cdot)}\|_{U^\alpha} \leq C \rho_{F^\alpha}(f_a^\alpha, f_b^\alpha),$$

которое означает наличие искомой устойчивости. Теорема доказана. ■

Покажем теперь, что разностная схема (5.38) аппроксимирует задачу (5.36), (5.37).

**Лемма 5.6.** Пусть для задачи Коши (5.36), (5.37) выполнены условия леммы 7.2, а неотрицательный источник  $q$  является непрерывной суммируемой функцией, причем произведение  $(1 + \omega)q^\omega(t)$  имеет ограниченную норму в пространстве  $L_1^{(T)}$  при каждом положительном  $T$ . Тогда семейство решений задачи Коши (5.36), (5.37), занумерованных параметром  $N \in \mathbb{N}$ , равномерно непрерывное по  $\omega \in [0, a] \forall a > 0$ , на каждом отрезке изменения времени  $0 \leq t \leq T$ .

Доказательство этого утверждения практически дословно повторяет рассуждения леммы 7.2, проведенные для получения модуля непрерывности решения уравнения Смолуховского (5.1) без источника частиц, поэтому мы его опускаем.

**Теорема 5.8.** Пусть выполнены условия леммы 5.3 и значения оператора сужения решения  $[u]_{D_\alpha}$  на сетку  $D_\alpha$  определяются как значения решения  $u$  в узлах сетки. Тогда разностная схема (5.38) аппроксимирует задачу (5.36), (5.37).

□ Оценим невязку в метрике пространства  $F^\alpha$ , которая возникает в разностной схеме (5.38) при подстановке точного решения задачи (5.36), (5.37).

$$\begin{aligned} \delta_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \rho_{F^\alpha}(L_\alpha([u]_{D_\alpha}), f^\alpha) \leq \\ &\leq \sup_{\tau, h} \left| \frac{u^{(\omega_i)}((n+1)\tau) - u^{(\omega_i)}(n\tau)}{\tau} - S_h^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) - q^{(\omega_i)} \right| + \\ &+ \sup_h \left| u^{(\omega_i)}(0) - u_0^{(\omega_i)} \right|. \end{aligned}$$

Поскольку решение задачи (5.36), (5.37) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией по  $t$ , то

$$\begin{aligned} \delta_\alpha &\leq \sup_{\tau, h} \left| u_t^{(\omega_i)}(n\tau) + \frac{u_{tt}^{(\omega_i)}(\xi)\tau}{2} - S_h^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) - q^{(\omega_i)} \right| + \\ &+ \sup_h \left| u^{(\omega_i)}(0) - u_0^{(\omega_i)} \right|, \end{aligned}$$

где  $\xi \in [n\tau, (n+1)\tau]$ .

Учитывая, что  $u$  — точное решение задачи (5.36), (5.37), имеем

$$\delta_\alpha \leq \sup_{\tau, h} \left| \frac{u_{tt}^{(\omega_i)}(\xi)\tau}{2} + S_N^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) - S_h^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) \right|,$$

а поскольку решение задачи (5.36), (5.37) является функцией дважды непрерывно дифференцируемой по  $t$  и непрерывной по  $\omega$ , имеем

$$\delta_\alpha \leq \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ \omega \in [0, N]}} \left| u_{tt}^{(\omega)}(t) \right| \frac{\tau}{2} + \sup_{\tau, h} \left| S_N^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) - S_h^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) \right|.$$

Поскольку суммы в  $S_h$  на сужении точного решения аппроксимируют интегралы в  $S_N$  с погрешностью  $Ow(h)$ , то справедливо соотношение

$$\rho(\delta_\alpha, 0)_{F^\alpha} \leq \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ \omega \in [0, N]}} \left| u_{tt}^{(\omega)}(t) \right| \frac{\tau}{2} + C_{10}w(h).$$



Последнее неравенство означает наличие свойства аппроксимации. Теорема доказана. ■

**Следствие 5.3.** Разностный метод (5.38) сходится к решению задачи Коши (5.36), (5.37), и, следовательно, справедлива теорема 5.2.

**Теорема 5.9.** Решение разностного метода (5.38) сходится при  $N \rightarrow \infty$  к решению задачи Коши (5.33), (5.34), если исходные данные задачи в задаче без источника подчиняются требованиям теоремы 2.1, а непрерывный неотрицательный источник  $q \in \Omega^+(T)$  при каждом положительном  $T$ .

□ Поскольку в силу следствия 5.3 решение разностного метода (5.38) сходится к решению задачи (5.36), (5.37), то для доказательства настоящей теоремы достаточно установить, что последовательность решений этой задачи, занумерованных параметром  $N$ , равномерно сходится на компактах при  $N \rightarrow \infty$  к решению задачи (5.33), (5.34). Метод доказательства этого утверждения полностью повторяет рассуждения гл. 7 в теоремах 7.1, 7.2 и следствия 7.2. Теорема доказана. ■

**Замечание 5.10.** Рассмотрим приближенный численный метод решения задачи Коши (5.33), (5.34), основанный на применении неявной разностной схемы

$$\frac{u_\alpha^{(\omega_i)}(t + \tau) - u_\alpha^{(\omega_i)}(t)}{\tau} = S_h^{(\omega_i)}(u_\alpha^{(\cdot)}(t)) + q^{(\omega_i)},$$

$$t \in \mathbb{R}_1^+, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+,$$

$$u_\alpha^{(\omega_i)}(t) = u_0^{(\omega_i)}, \quad 0 \leq t < \tau.$$
(5.48)

Здесь операторы  $S_h$  определены формулами

$$S_h^{(\omega_i)}(u_\alpha^{(\cdot)}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{(\omega_i - h)/h} h \Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) u_\alpha^{(\omega_i - \omega_j)}(t) u_\alpha^{(\omega_j)}(t) - \sum_{j=0}^M h \Phi(\omega_i, \omega_j) u_\alpha^{(\omega_i)}(t) u_\alpha^{(\omega_j)}(t),$$

$h$  — шаг разбиения по переменной  $\omega$ ,  $h > 0$ ,

$M = \left[ \frac{N}{h} \right]$ ,  $0 \leq i \leq M$ ,

$\tau$  — шаг разбиения по переменной  $t$ ,  $\tau > 0$ ,

$\omega_i = ih$ ,  $u_\alpha^{(\omega)}(t) = u_\alpha^{(\omega_i)}(n\tau)$  при  $\omega_i \leq \omega \leq \omega_{i+1}$ ,

$n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ ,  $0 \leq n \leq [T/\tau]$ ,

$\alpha = (\tau, h)$  — параметры метода. Функция источника  $q^{(\omega_i)}$  удовлетворяет условию  $q^{(\omega_i)} \geq 0$ ,  $q \in L_1(\mathbb{R}_1^+)$ , на ядро  $\Phi$  налагаем условие  $\Phi \in \mathcal{K}_\gamma$ ,  $\gamma \leq 1$ .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 5.9. Ограничения на шаг для неявной разностной схемы не требуется, так как условие неотрицательности функции  $u^{(\omega)}(t)$  выполняется при любом положительном шаге по времени  $\tau$ .

Приближенный метод (5.38), а также приближенный метод (5.48) были численно реализованы и тестированы [3, 4].

Обоснование разностного метода (5.35) для ядер  $\Phi$  с произвольным порядком роста проводится для более общего метода (3.5), (3.6). Этот метод обоснован в теореме 3.1 во множестве функциональных решений законов сохранения, включающих в себя уравнения Смолуховского и Больцмана (см. теоремы 3.2 и 3.3).

# **ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ КОАГУЛЯЦИИ**

## **§ 1. ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНАЯ КОАГУЛЯЦИЯ**

Коагуляция (слияние) частиц является одной из основных причин эволюции пространственно неоднородных дисперсных систем, под которыми понимают механическую смесь среды (газообразной или жидкой) с частицами диспергированной фазы (твердой или жидкой), причем свойства фаз существенно зависят от переноса вещества между различными точками координатного пространства. При этом важно подчеркнуть наличие дисперсии скоростей переноса для частиц, находящихся в различных состояниях (иначе заменой системы пространственно-временных координат описание сводится к модели, подобной пространственно однородному случаю, который подробно рассматривается в гл. 7).

Пространственно неоднородная коагуляция наблюдается в различных физических ситуациях: в растворах — броуновская коагуляция, при образовании капель дождя — гравитационная коагуляция. Следует подчеркнуть, что наличие пространственной неоднородности значительно усложняет исследование математических моделей коагуляции. В частности, это обусловлено новым эффектом (по сравнению с пространственно однородными задачами), а именно, возникновением недифференцируемых особенностей решения по пространственно-временным переменным. Эти особенности, в свою очередь, порождают пространственно-временные зоны, в которых соотношение сохранения для оператора столкновений Смолуховского переходит в соотношение диссипации (эти области можно интерпретировать как зоны интенсивного образования осадков, не взаимодействующих с дисперсной фазой). Процесс пространственно неоднородной коагуляции оказывает воздействие на рост кристаллов в растворах, газовых пузырей и пор в твердом теле. Серьезное влияние оказывает пространственно неоднородная коагуляция продуктов горения топлива на тягу реактивных двигателей.

Физическим аспектам явления коагуляции посвящена обширная литература [28, 29, 190, 250].

Физический формализм получения уравнений пространственно неоднородной кинетической теории коагуляции описан в [154–156].

Математически строгий вывод кинетического уравнения, приводящего к оператору столкновений Смолуховского, осуществлен в [232] для случая дискретных масс в предположении броуновского блуждания частиц. При этом интенсивность столкновений частиц постоянна.

Основные предположения физического характера, накладываемые на систему коагулирующих частиц, состоят в следующем. Частиц достаточно большое количество, чтобы можно было применять функцию распределения частиц по массам и в координатном пространстве. Считается, что частицы испытывают только парные столкновения и образуют локально хаотическое множество [150, 259, 232, 260].

Математические вопросы корректности задач кинетической теории коагуляции весьма сложные и большинство результатов относится, как правило, к теории пространственно однородных систем либо близких к ним. Пространственно неоднородные задачи, в особенности связанные со свободным переносом частиц, осуществляемым посредством однопараметрической группы сдвигов по пространственной переменной, являются наиболее трудными с математической точки зрения и составляют предмет исследования этой главы [67, 68, 99, 103]. В отличие от результатов гл. 6, относящихся к решениям пространственно неоднородных задач в малой окрестности нуля (вакуума) [69], здесь получены глобальные результаты с произвольными неотрицательными суммируемыми начальными данными. Возникновение недифференцируемых особенностей решений при сколь угодно гладких начальных данных приводит к необходимости использования понятия обобщенного решения. Построены примеры возникновения особенностей и указана их связь с явлением перехода соотношения сохранения в соотношение диссипации для оператора столкновений Смолуховского. Следует подчеркнуть, что указанное явление имеет место даже для случая ограниченных ядер взаимодействия частиц, что указывает на существенные отличия пространственно неоднородных задач от пространственно однородных, для которых подобные явления связаны с быстрым ростом ядра или медленным спадом начальной функции на бесконечности (см. гл. 7).

## § 2. НЕГЛАДКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНЫХ МАСС

Рассмотрим математическую модель процесса коагуляции в дисперсной системе, состоящей из вязкой среды, в которой вдоль оси  $Ox = \{x \in \mathbb{R}\}$  под действием внешней силы с постоянной скоростью движутся частицы, состоящие из объединений мономеров с массой  $\mu_1 > 0$ . Частицу, порожденную объединением  $i$  мономеров (т. е. ее масса равна  $i\mu_1$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ), будем для краткости именовать « $i$ -мер», слово *полимер* примем для обозначения бесконечного объединения мономеров. Пусть скорость движения  $i$ -мера равна  $v_i$ , а при столкновении пары частиц происходит их слияние в единый конгломерат, состоящий из суммарного количества мономеров обеих частей (*коагуляция*). Для описания эволюции концентрации  $i$ -меров  $f_i \stackrel{\text{def}}{=} f(i, x, t)$  в такой системе используется кинетическое уравнение Смолуховского

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_{i-j,j} f_{i-j} f_j - f_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j} f_j, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (6.1)$$

где  $\Phi_{i,j} = \sigma_{i,j} |v_i - v_j|$  — интенсивность слияния  $i$  и  $j$ -меров;  $\sigma_{i,j}$  — сечение захвата, являющееся симметричной, неотрицательной функцией на  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Оператор столкновений, определяемый правой частью уравнения (6.1), обозначим  $S_i(f)$ ,  $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Первое слагаемое в  $S_1(f)$  считаем по определению равным нулю. Выражение для  $S_i(f)$  задает локальный баланс между рождением  $i$ -меров из-за слияния  $i-j$  и  $j$ -меров и уничтожением  $i$ -меров. Оператор столкновений определяет локальный закон сохранения количества вещества, заключенного в частицах, состоящих из конечного числа мономеров, ибо для финитных наборов концентраций  $f$  справедливо равенство

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} i S_i(f) = 0.$$

Для уравнения (6.1) рассматривается задача Коши с начальными данными

$$f(i, x, 0) = \varphi_i(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (6.2)$$

Ниже указываются достаточные условия, когда на решении уравнения (6.1) возникают негладкие особенности по переменным  $x, t$  при сколь угодно гладкой начальной функции  $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

Интегральной формой задачи (6.1), (6.2) является нелинейное интегральное уравнение вольтерровского вида

$$f|_t = T_t \varphi + \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f)|_\tau d\tau, \quad t \geq 0, \quad (6.3)$$

где  $T_t$  — однопараметрическая группа сдвигов, действие которой определено формулой

$$T_t(\varphi)(i, x) = \varphi_i(x - v_i t), \quad \varphi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) определяет обобщенное решение задачи Коши для уравнения Смолуховского (6.1). Существование обобщенного решения доказывается в § 6 настоящей главы.

Примем обозначение  $\bar{f} = T_t \varphi$  для набора концентраций при свободном переносе частиц. Положим

$$\begin{aligned} \bar{I}_i(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j} \bar{f}(j, x, t), \\ I_i(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j} f(j, x, t). \end{aligned}$$

**Теорема 6.1.** Пусть сечение захвата частиц  $\sigma_{i,j}$  ( $i, j \in \mathbb{N}$ ) удовлетворяет неравенствам

$$0 < \inf_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \sigma_{i,j} \leq \sup_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \sigma_{i,j} < \infty,$$

скорость свободного переноса частиц  $v_i$  является строго монотонной функцией аргумента  $i \in \mathbb{N}$ . Предположим, что начальные концентрации  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  в условии (6.2) — положительные гладкие по  $x \in \mathbb{R}$  функции, имеющие конечные интегралы

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \Phi_{i,j}) j \varphi_j(x) dx < \infty,$$

и  $\varphi_j(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Пусть набор начальных концентраций  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$  удовлетворяет локальному соотношению сохранения

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} i S_i(f|_{t=0}) = 0.$$

Тогда если существуют точки  $(x, t)$ , в которых величина  $\bar{I}(x, t) = +\infty$ , то независимо от класса гладкости начальных концентраций решение уравнения (6.1) с этими начальными данными не может быть гладким по  $(x, t)$  для всех  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Замечание 6.1.** В точках, где  $\bar{I}(x, t) = +\infty$ , решение задачи Коши (6.1), (6.2) имеет особенность типа «градиентная катастрофа», т. е. производные обращаются в бесконечность. При этом в указанных точках  $S_i(f) = -\infty$  и, следовательно, справедливо неравенство

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} i S_i(f) < 0. \quad (6.5)$$

Значит, локальное соотношение сохранения (6.4) с течением времени преобразуется в локальное соотношение диссипации (6.5).

Перед доказательством теоремы 6.1 сделаем ряд предварительных утверждений.

**Лемма 6.1.** Пусть последовательность непрерывных неотрицательных функций  $u_i(x, t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  подчиняется неравенствам

$$u_i(x, t) \leq T_t u_i(\cdot, 0) + C_i \int_0^t \sum_{j=1}^{i-1} T_{t-\tau} (u_{i-j}(\cdot, \tau) u_j(\cdot, \tau)) d\tau, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (6.6)$$

где  $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — монотонно возрастающая последовательность неотрицательных чисел. Положим по определению сумму в правой части неравенства при  $i = 1$  тождественно равной нулю. Если начальные функции  $u_i(x, 0)$  удовлетворяют неравенствам

$$u_i(x, 0) \leq F_0 = \text{const} < \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N},$$

то справедливы соотношения

$$u_i(x, t) \leq F_0 \exp(F_0 i C_i t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0. \quad (6.7)$$

□ Утверждение леммы получим методом математической индукции, применяемым по индексу  $i \in \mathbb{N}$ . При  $i = 1$  имеем очевидное неравенство, из которого следует первая часть принципа математической индукции. Если соотношение (6.7) справедливо для функций  $u_j$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ ,  $i > 2$ , то выполняется неравенство

$$u_i(x, t) \leq F_0 + C_i \int_0^t \sum_{j=1}^{i-1} F_0^2 \exp(F_0(jC_j + (i-j)C_{i-j})\tau) d\tau.$$

Поскольку  $C_j \leq C_i$ ,  $(i-j)C_{i-j} \leq (i-j)C_i$  при  $i \geq j$ , то

$$u_i(x, t) \leq F_0 + C_i F_0^2 \int_0^t \exp(F_0 i C_i \tau) d\tau = F_0 \exp(F_0 i C_i t),$$

что завершает доказательство леммы. Лемма доказана. ■

**Лемма 6.2.** Пусть выполнены условия леммы 6.1 и в дополнение к ним функции  $u_i(x, 0) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty \forall i \in \mathbb{N}$ . Тогда  $u_i(x, t) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ , при каждом  $i \in \mathbb{N}$  равномерно относительно изменения значений  $t$  на любом конечном промежутке в пространстве  $\mathbb{R}_1^+$ .

□ Утверждение леммы получается методом математической индукции по номеру  $i \in \mathbb{N}$ . При  $i = 1$  имеем

$$u_1(x, t) \leq u_1(x - v_1 t, 0).$$

Поскольку  $u_1(x, 0) \rightarrow 0$ , когда  $x \rightarrow \infty$ , то  $u_1(x, t) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $0 \leq t \leq T \forall T \in \mathbb{R}_1^+$ . Предположим, что функции  $u_j(x, t)$  обладают таким свойством для  $1 \leq j \leq i - 1$ , тогда из неравенства (6.6) вытекает утверждение леммы для  $u_i$ . Лемма доказана. ■

**Лемма 6.3.** Пусть  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — гладкое неотрицательное решение задачи Коши (6.1), (6.2), соответствующее начальным данным, для которых выполнены условия теоремы 6.1. Тогда при  $t \geq 0$  справедливы следующие неравенства:

$$\int_{\mathbb{R}_1} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}_1} \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) dx = N_0, \quad (6.8)$$

$$\int_0^t \sum_{j \in \mathbb{N}} |a - v_j| f_j(x + a\tau, \tau) d\tau \leq 2N_0 \quad \forall a \in \mathbb{R}_1. \quad (6.9)$$

**Замечание 6.2.** Неравенства (6.8), (6.9) имеют простой физический смысл. Оценка (6.8) означает, что в коагулирующей системе число частиц с ростом времени уменьшается, а оценка (6.9) показывает, что через сечение потока коагулирующих частиц, движущееся со скоростью  $a$  вдоль оси  $Ox$ , может пройти не более  $2N_0$  частиц за время  $t$  при монотонной функции  $v_i$ , поскольку каждая частица проходит через это сечение не более двух раз.

□ Получим сначала неравенство (6.8). Суммируя в (6.1) по индексу  $1 \leq i \leq M$ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^M f_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^M v_i f_i(x, t) \leq 0,$$

ибо  $\sum_{i=1}^M S_i(f) \leq 0 \forall M \in \mathbb{N}$ . Интегрируя это неравенство по времени, получаем

$$\sum_{i=1}^M f_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^M v_i \int_0^t f_i(x, \tau) d\tau \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x).$$



Дальнейшее интегрирование по переменной  $x$  при  $|x| \leq A$  приводит к соотношению

$$\int_{-A}^A \sum_{i=1}^M f_i(x, t) dx + \sum_{i=1}^M v_i \int_0^t [f_i(A, \tau) - f_i(-A, \tau)] d\tau \leq N_0.$$

Воспользовавшись результатом леммы 6.2, перейдем к пределу при  $A \rightarrow +\infty$ . Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}_1} \sum_{i=1}^M f_i(x, t) dx \leq N_0.$$

Переходя к пределу  $M \rightarrow \infty$  на основании леммы Б. Леви [94], получаем окончательно неравенство (6.8).

Теперь установим справедливость оценки (6.9). Поскольку функция  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  монотонная, то без ограничения общности можно считать ее монотонно возрастающей (в противном случае следует сделать замену переменных  $x \mapsto -x$  в уравнении (6.1)). Итак, при монотонно возрастающей функции  $v_i$  в тождестве (6.1) сделаем замену переменных:

$$t \mapsto t, \quad x \mapsto x + at, \quad a = \text{const},$$

тогда для функций

$$\tilde{f}_i(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} f_i(x + at, t), \quad i \in \mathbb{N},$$

имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_i + (v_i - a) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}_i = S_i(\tilde{f}_i), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (6.10)$$

Обозначим  $i_0$  наибольшее значение индекса  $i$ , для которого  $v_i < a$ . Тогда суммированием по номеру  $i$  получаем неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{i_0} \tilde{f}_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{i_0} (v_i - a) \tilde{f}_i(x, t) \leq 0.$$

После интегрирования обеих частей этого неравенства по времени на промежутке  $(0, t)$  и по пространственной переменной на интервале  $(x, +\infty)$ , учитывая лемму 6.2, имеем

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{i_0} (a - v_i) \tilde{f}_i(x, \tau) d\tau \leq \int_x^{+\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(\xi) d\xi = N_0^+. \quad (6.11)$$

Повторим те же рассуждения для сумм по номеру  $1 \leq i \leq M$  в соотношении (6.10), интегрируя теперь по пространственной переменной на промежутке  $(-\infty, x)$ . Таким образом, получаем

$$\int_0^t \sum_{i=1}^M (v_i - a) \tilde{f}_i(x, \tau) d\tau \leq \int_{-\infty}^x \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(\xi) d\xi = N_0^-.$$

Полагая  $M > i_0$  и учитывая (6.11), приходим к неравенству

$$\int_0^t \sum_{i=i_0+1}^M (v_i - a) \tilde{f}_i(x, \tau) d\tau \leq N_0^+ + N_0^- = N_0. \quad (6.12)$$

Сочетая неравенства (6.11), (6.12) и переходя к пределу  $M \rightarrow \infty$ , устанавливаем справедливость неравенства

$$\int_0^t \sum_{i \in \mathbb{N}} |v_i - a| \tilde{f}_i(x, \tau) d\tau \leq 2N_0.$$

Возвратимся в этом соотношении к исходным функциям  $f_i$  и тем самым получаем (6.9). Лемма доказана. ■

### Доказательство теоремы 6.1

□ Предположим, что при условиях теоремы существует гладкое решение задачи (6.1), (6.2) при всех  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Отбрасывая в правой части тождества (6.1) неотрицательные слагаемые, приходим к неравенству

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \geq -f_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j} f_j, \quad i \in \mathbb{N},$$

и, таким образом,

$$f_i(x, t) \geq \bar{f}_i(x, t) \exp \left[ - \int_0^t I_i(\xi, \tau) |_{\xi=x-v_i(t-\tau)} d\tau \right],$$

$$i \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0.$$

Воспользовавшись неравенством (6.9) из леммы 6.3, получаем оценку интеграла

$$\int_0^t I_i(\xi, \tau) |_{\xi=x-v_i(t-\tau)} d\tau \leq 2N_0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

которая в сочетании с предыдущим неравенством приводит к соотношению

$$f_i(x, t) \geq \bar{f}_i(x, t) \exp(-2 \sup_{i, j \in \mathbb{N}} \sigma_{i, j} N_0), \quad i \in \mathbb{N},$$

$$t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.13}$$

В силу положительности начальных данных  $\varphi$  имеем положительность функций  $\bar{f}_i, i \in \mathbb{N}$  и, значит,  $f_i > 0$  при  $t \geq 0$ . Кроме того, подставляя правую часть оценки (6.13) в выражение для  $I_i(x, t)$ , имеем неравенство

$$I_i(x, t) \geq c_1 \bar{I}_i(x, t),$$

где постоянная  $c_1 > 0$  не зависит от  $i \in \mathbb{N}$ . Итак, в точках, где значения  $\bar{I} = +\infty$ , значения оператора столкновений

$$S_i(f(x, t)) = -\infty$$

из-за строгой положительности и ограниченности величин  $f_i$ . Тем самым доказано, что в указанных точках значение характеристической производной

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = -\infty, \quad i \in \mathbb{N},$$

т. е. возникает «градиентная катастрофа», причем в этих точках

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} S_i(f) = -\infty.$$

Теорема доказана. ■

Возникновение особенностей решения уравнения (6.1), установленное в теореме 6.1, обусловлено тем, что значения скорости свободного переноса частиц  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  различны при бесконечном наборе индексов  $i \in \mathbb{N}$ . В противном случае утверждение теоремы не имеет места, поскольку задача становится практически пространственно однородной (за исключением конечного набора индексов  $i$ ), и указанный эффект, связанный с перемешиванием частиц из различных точек пространства, взятых в бесконечном количестве, не возникает. Таким образом, рассмотренное явление связано с существенной пространственной неоднородностью кинетической системы и основано на дисперсии скоростей свободного переноса частиц.

Остановимся на построении начальных данных для теоремы 6.1. Отметим, что значения  $\bar{I}$  отыскиваются по формуле

$$\bar{I}_i(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{i, j} |v_i - v_j| \varphi_j(x - v_i t).$$

Пусть функции  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  являются гладкими, неотрицательными, финитными, причем  $\bar{I}_i(x, 0) < \infty \forall i$ . Фиксируем  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 > 0$  и предположим, что значения начального распределения подчиняются условию

$$\varphi_i(x_0 + v_i t_0) = 1, \quad i \in \mathbb{N},$$

считая при этом последовательность  $v_i$  строго монотонно возрастающей; ширину носителя функции  $\varphi_i$  подберем так, чтобы сошлись все интегралы, указанные в формулировке теоремы 6.1. Очевидно, что при таком выборе начальных данных в точке  $(x_0, t_0)$  значение  $\bar{I}_i(x_0, t_0) = +\infty$ . Естественно, от финитности  $\varphi_i$  можно легко отказаться, заменяя это требование на строгую положительность и достаточно быстрое стремление к нулю  $\varphi_i(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Для ограниченных монотонных скоростей свободного переноса частиц можно указать начальные данные, удовлетворяющие условиям теоремы 6.1, когда функция  $\bar{I} = +\infty$  на линии, выходящей из  $(x_0, t_0)$  и трансверсальной к характеристическим направлениям уравнения (6.1).

Подчеркнем еще раз, что приведенная конструкция основана на дисперсии скоростей свободного переноса для бесконечного набора индексов  $i \in \mathbb{N}$ . Возникающие при этом особенности спектров обусловлены взаимодействием свободного переноса и столкновений частиц, что связано с нарушением соотношения сохранения.

### § 3. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНЫХ МАСС

Возникновение негладких особенностей решения задачи (6.1), (6.2) при сколь угодно гладкой начальной функции приводит к необходимости расширить понятие решения задачи. Пусть  $\Psi$  — семейство гладких функций, определенных на полуплоскости

$$\Pi = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\},$$

имеющих компактный носитель.

**Определение 6.1.** Назовем *обобщенным решением задачи Коши* (6.1), (6.2) упорядоченный набор  $f = \{f_i\}$  ограниченных на каждом компакте в полуплоскости  $\Pi$  измеримых функций, удовлетворяющий при любых  $\psi \in \Psi$  и  $i \in \mathbb{N}$  интегральному соотношению

$$\int_{\Pi} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) f_i + \psi S_i(f) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \varphi_i(x) dx = 0. \quad (6.14)$$

**Замечание 6.3.** Обобщенное решение задачи (6.1), (6.2) почти везде в полуплоскости  $\Pi$  по отношению к плоской мере Лебега удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению вольтерровского вида (6.3).

**Теорема 6.2.** Пусть скорости свободного переноса  $v_i \geq 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , сечение взаимодействия частиц  $\sigma_{i,j}$  ( $i, j \in \mathbb{N}$ ) — симметричная неотрицательная функция, которая удовлетворяет неравенству

$$\sup_{i,j \in \mathbb{N}} \sigma_{i,j} (i^\gamma + j^\gamma)^{-1} < \infty$$

при некотором  $0 \leq \gamma < 1$ . Предположим, что  $\varphi_i$  при каждом номере  $i \in \mathbb{N}$  — измеримая неотрицательная функция, ограниченная на каждом компакте в  $\mathbb{R}$ , и справедливо соотношение

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{N}} i \varphi_i(x) dx = M < \infty. \quad (6.15)$$

Тогда при этих условиях существует обобщенное решение задачи (6.1), (6.2), неотрицательное в полуплоскости  $\Pi$ .

**Замечание 6.4.** Указанным условиям удовлетворяет случай гравитационной коагуляции облачных капель в предположении справедливости закона Стокса [28] для падения их в воздухе под действием силы тяжести, когда

$$\sigma_{i,j} = \mathcal{O}(i^{2/3} + j^{2/3}), \quad v_i = \mathcal{O}(i^{2/3}) \quad (i, j \in \mathbb{N}). \quad (6.16)$$

**Замечание 6.5.** Условия теоремы 6.1 содержатся в требованиях теоремы 6.2.

**Замечание 6.6.** Условие (6.15) означает ограниченность количества вещества в коагулирующей системе.

**Замечание 6.7.** Требование неотрицательности скоростей свободного переноса  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  можно заменить односторонней ограниченностью этих величин.

Для доказательства теоремы установим свойства решений, аппроксимирующих (6.1), (6.2) конечных по индексу  $i$  задач

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_{i-j,j} u_{i-j} u_j - u_i \sum_{j=1}^n \Phi_{i,j} u_j, \\ u_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad (x, t) \in \Pi, \quad 1 \leq i \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (6.17)$$

где функции  $\Phi_{i,j}$ ,  $\varphi_i$  удовлетворяют условиям теоремы 6.2.

**§ 4. ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ЗАДАЧ (6.17)**

**Лемма 6.4.** Пусть  $\varphi_i, i \in \mathbb{N}$  — гладкие неотрицательные на  $\mathbb{R}$  функции,  $\Phi_{i,j} = \Phi_{j,i} \geq 0$ . Тогда задача (6.17) при любом номере  $n \in \mathbb{N}$  имеет единственное гладкое в полуплоскости  $\Pi$  решение. Это решение неотрицательное и устойчивое в топологии равномерной сходимости на компактах в полуплоскости  $\Pi$ .

□ Обозначим

$$V_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} v_i, \quad V_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} v_i.$$

Рассмотрим трапецию

$$K_X^\tau = \{(x, t) : 0 \leq t \leq \tau, -X - V_{\min}(t - \tau) \leq x \leq X + V_{\max}(t - \tau), X > 0\}.$$

При заданном  $X$  можно указать такое положительное число

$$\tau(X, n, \sup_{|x| \leq X} \max_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(x)),$$

при котором полулинейная гиперболическая система (6.17) имеет единственное гладкое решение на трапеции  $K_X^\tau$  [142], которое строится методом последовательных приближений на характеристиках. Это решение непрерывно зависит от исходных данных в топологии равномерной сходимости на компактах в общей области существования такого решения. Гладкость локального решения обеспечивается гладкостью начальных данных и полиномиальной формой нелинейности системы. Покажем, что неотрицательным функциям  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  соответствует неотрицательное решение задачи (6.17) на трапеции  $K_X^\tau$ . Для этого аппроксимируем неотрицательные начальные данные строго положительными гладкими функциями на множестве

$$\{x : -X - V_{\min}\tau \leq x \leq X + V_{\max}\tau, X > 0\}.$$

Сначала установим, что положительным  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  соответствует положительное решение задачи (6.17) на  $K_X^\tau$ . В силу равномерной непрерывности решения на трапеции  $K_X^\tau$  можно указать такое число  $\tau'$  ( $0 < \tau' < \tau$ ), что функции  $u_i(x, t) > 0, 1 \leq i \leq n$ , при

$$0 \leq t \leq \tau', \quad -X - V_{\min}t \leq x \leq X + V_{\max}t, \quad X > 0.$$

Предположим, что существуют точки, где обращается в нуль одна из компонент решения  $\{u_i\}_{i=1}^n$  на  $K_X^\tau$ . Среди множества нулей функций  $\{u_i\}_{i=1}^n$  выберем на  $K_X^\tau$  точку с наименьшим значением аргумента  $t$ , обозначив ее координаты  $(x_0, t_0)$ . Итак, функции  $u_i > 0, 1 \leq i \leq n$ , на  $K_X^\tau \forall \bar{\tau} < t_0$ . Обозначим  $i_0$  минимальное значение индекса  $i$ ,

для которого  $u_i(x_0, t_0) = 0$ . Поскольку при  $i = 1$  справедливо тождество

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -u_1 \sum_{j=1}^n \Phi_{i,j} u_j,$$

то  $u_1 > 0$  при всех  $(x, t) \in K_X^\tau$ , следовательно,  $i_0 > 1$ . Таким образом,

$$\left( \frac{\partial u_{i_0}}{\partial t} + v_{i_0} \frac{\partial u_{i_0}}{\partial x} \right) \Big|_{(x_0, t_0)} = \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i_0-1} \Phi_{i_0-j, j} u_{i_0-j} u_j \right) \Big|_{(x_0, t_0)} > 0,$$

ибо  $u_{i_0}(x_0, t_0) = 0$ ,  $u_j(x_0, t_0) > 0$ ,  $1 \leq j < i_0$ . Поскольку величина  $t_0 > 0$ , то

$$u_{i_0}(x_0 + sv_{i_0}, t_0 + s) < 0$$

при достаточно малых  $s < 0$ , что противоречит требованиям выбора  $t_0$ . Полученное противоречие доказывает положительность решения в области его существования. Предельный переход к неотрицательным начальным данным с учетом свойства устойчивости решения позволяет установить неотрицательность соответствующего решения. Применяя рассуждения из леммы 6.1 на компакте  $K_X^\tau$ , убеждаемся, что имеет место оценка

$$\begin{aligned} 0 \leq u_i(x, t) &\leq F_0 \exp(F_0 i C_i t), \quad (x, t) \in K_X^\tau, \\ F_0 &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{\substack{-X - V_{\min} \tau \leq x, \\ x \leq X + V_{\max} \tau}} \varphi_i(x), \\ C_i &= \max_{1 \leq j, k \leq n} \Phi_{k,j}, \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned} \tag{6.18}$$

позволяющая продолжить решение системы на треугольник

$$\Delta_X = \left\{ (x, t): -X_1 + V_{\min} t \leq x \leq X_2 - V_{\max} t, 0 \leq t \leq \frac{2X}{V_{\min} + V_{\max}}, \right. \\ \left. X_1 = X + V_{\min} \tau, X_2 = X + V_{\max} \tau \right\}.$$

Устремляя  $X \rightarrow +\infty$ , получаем решение на  $\Pi$ . Лемма доказана. ■

**Лемма 6.5.** Пусть  $\{u_i\}_{i=1}^n$  — гладкое неотрицательное решение задачи (6.17) в  $\Pi$ . Тогда для любого компакта  $\Omega \subset \Pi$  и номера  $1 \leq i \leq n$  можно указать такую постоянную  $C(i, \Omega)$ , не зависящую от  $n \in \mathbb{N}$ , что  $u_i \leq C(i, \Omega)$  при  $(x, t) \in \Omega$ .

Утверждение этой леммы является непосредственным следствием оценки (6.1), полученной при доказательстве леммы 6.4.

**Лемма 6.6.** Пусть выполнены условия леммы 6.4. Тогда на любом компакте  $\Omega \subset \Pi$  имеет место неравенство

$$\int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} u_i(x + v_i\tau, \tau) \right| d\tau \leq C(i, \Omega), \quad (x, t) \in \Omega,$$

где постоянные  $C(i, \Omega)$  не зависят от номера  $n \in \mathbb{N}$  и свойств гладкости начальных данных  $\{\varphi_i\}$ .

□ Для доказательства достаточно получить утверждение в каждом параллелограмме

$$\Omega_{X,T} = \{(x, t): -X + v_it \leq x \leq X + v_it, 0 \leq t \leq T\}.$$

В силу леммы 6.5 функции  $\{u_i\}_{i=1}^n$  ограничены на компакте  $\Omega_{X,T}$  постоянными  $C_1(i, \Omega_{X,T})$ , которые не зависят от номера  $n \in \mathbb{N}$  и определяются максимальными значениями начальных данных  $\{\varphi_i\}$  на конечном отрезке изменения  $x \in \mathbb{R}$ . Таким образом, имеем неравенство

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + v \frac{\partial u_i}{\partial x} \leq L_i, \quad (x, t) \in \Omega_{X,T},$$

где

$$L_i = (i - 1) \max_{1 \leq l, k \leq i} \Phi_{k,l} \max_{1 \leq j \leq i} C_1(j, \Omega_{X,T}).$$

Следовательно, функция  $g_i(x, t) \equiv u_i(x, t) - L_it$  подчиняется неравенству

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial g_i}{\partial x} \leq 0.$$

Поскольку функция  $g_i$  на компакте  $\Omega_{X,T}$  ограничена и монотонно убывает вдоль характеристического направления, то справедлива оценка

$$\int_0^t \left| \frac{dg_i(x + v_i\tau, \tau)}{d\tau} \right| d\tau \leq C_2, \quad (x, t) \in \Omega_{X,T},$$

где постоянная  $C_2 = C_1(j, \Omega_{X,T}) + L_i$ . Учитывая неравенство

$$\left| \frac{du_i(x + v_i\tau, \tau)}{d\tau} \right| \leq \left| \frac{dg_i(x + v_i\tau, \tau)}{d\tau} \right| + L_i$$

в сочетании с предыдущим соотношением, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. ■



### § 5. СЛАБАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Доказательство существования обобщенного решения задачи (6.1), (6.2) опирается на возможность слабого предельного перехода под знаком оператора столкновений  $S$  по некоторой подпоследовательности решений задачи (6.17), продолженных тождественным нулем при  $i > n$ . Это устанавливается на основе нижеследующей теоремы 6.3, идейно связанной с работами Л. Тарта по компенсированной компактности [263].

Пусть  $u$  — вещественная борелева функция на пространстве  $\mathbb{R}_2$ . Выделим компактную область  $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ . Для области  $\Omega$  определим на соответствующих классах эквивалентных функций следующие нормы:

$$\|u\|_0(\Omega) = \left[ \int_{\Omega} |u|^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2},$$

$$\|u\|_1(\Omega) = \left[ \int_a^b \left( \int_{\Omega \cap (x_2 = \text{const})} |u| dx_1 \right)^2 dx_2 \right]^{1/2},$$

$$a = \inf_{\Omega} x_2, \quad b = \sup_{\Omega} x_2,$$

$$\|u\|_2(\Omega) = \left[ \int_c^d \left( \int_{\Omega \cap (x_1 = \text{const})} |u| dx_2 \right)^2 dx_1 \right]^{1/2},$$

$$c = \inf_{\Omega} x_1, \quad d = \sup_{\Omega} x_1,$$

$$\|u\|_{\infty}(\Omega) = \text{vrai max}_{\Omega} |u|.$$

Символы  $\partial_i u$ ,  $i = 1, 2$ , присвоим обобщенным производным функции  $u$  на пространстве  $\mathbb{R}_2$  по аргументам  $x_i$  соответственно.

**Теорема 6.3.** Пусть при любом номере  $m \in \mathbb{N}$  функции  $u_m, w_m$ , принадлежащие пространству  $L_2^{\text{loc}}(\Omega)$ , обладают обобщенными производными  $\partial_1 u_m, \partial_1 w_m$  соответственно, причем для любой компактной области  $\Omega \subset \mathbb{R}_2$  выполнены соотношения

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \{ \|u_m\|_{\infty}(\Omega), \|\partial_1 u_m\|_1(\Omega) \} < \infty,$$

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \{ \|w_m\|_{\infty}(\Omega), \|\partial_2 w_m\|_2(\Omega) \} < \infty.$$

Предположим, что

$$u_m \rightarrow u \quad \text{и} \quad w_m \rightarrow w \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty$$

слабо в пространстве  $L_2(\Omega)$  для любой компактной области  $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ . Тогда произведение  $u_m w_m$  стремится к  $uw$  при  $m \rightarrow \infty$  слабо в пространстве  $L_2(\Omega)$  на  $\Omega$ .

Докажем сначала утверждение теоремы 6.3 для гладких финитных функций.

**Лемма 6.7.** Пусть  $u_m, w_m, m \in \mathbb{N}$ , — гладкие финитные функции на квадрате

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2 : -\pi \leq x_1, x_2 \leq \pi\},$$

обращающиеся в нуль на границе  $\partial\Omega$ . Пусть для  $u_m, w_m$  выполняются условия теоремы 6.3. Тогда произведения  $u_m w_m$  сходятся слабо в пространстве  $L_2(\Omega)$  при  $m \rightarrow \infty$  к функции  $uw$ , где  $u, w$  — слабые пределы в пространстве  $L_2(\Omega)$  последовательностей функций  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ .

□ Фиксируем на множестве  $\Omega$  базис Фурье в пространстве  $L_2(\Omega)$ :

$$\varphi_{k_1, k_2} = \frac{1}{2\pi} \exp(i(k_1 x_1 + k_2 x_2)), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \quad (6.19)$$

образующий ортонормированную систему по отношению к скалярному произведению

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f \bar{g} dx_1 dx_2,$$

где  $\bar{g}$  — комплексно сопряженная к  $g$  функция. Разложим функции  $u_m, \partial_1 u_m, w_m, \partial_2 w_m$  в ряды Фурье по системе (6.19). Введем обозначения для коэффициентов Фурье:

$$\begin{cases} a_{k_1, k_2}^{(m)} = (u_m, \varphi_{k_1, k_2}), \\ a_{k_1, k_2}'^{(m)} = (\partial_1 u_m, \varphi_{k_1, k_2}), \\ a_{k_1, k_2} = (u, \varphi_{k_1, k_2}), \end{cases} \quad \begin{cases} b_{k_1, k_2}^{(m)} = (w_m, \varphi_{k_1, k_2}), \\ b_{k_1, k_2}'^{(m)} = (\partial_2 w_m, \varphi_{k_1, k_2}), \\ b_{k_1, k_2} = (w, \varphi_{k_1, k_2}), \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (6.20)$$

При этом имеет место связь

$$\begin{aligned} a_{k_1 k_2}'^{(m)} &= ik_1 a_{k_1, k_2}^{(m)}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \\ b_{k_1 k_2}'^{(m)} &= ik_1 b_{k_1, k_2}^{(m)}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Поскольку  $u_m \rightarrow u$  и  $w_m \rightarrow w$  при  $m \rightarrow \infty$  слабо в пространстве  $L_2(\Omega)$ , то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{k_1 k_2}^{(m)} &= a_{k_1, k_2}, \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} b_{k_1 k_2}^{(m)} &= b_{k_1, k_2}, \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Кроме того, функции  $u$  и  $w$  имеют ограниченную норму  $\|\cdot\|_\infty$  на  $\Omega$ . Доказательство проведем только для функции  $u$ , так как для  $w$  оно такое же. Рассмотрим множество

$$A_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in \Omega: u(x_1, x_2) \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_\infty(\Omega) + \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Оценим величину лебеговой меры  $\text{mes}(A_\varepsilon)$ . В силу слабой сходимости  $u_m$  для характеристической функции множества  $A_\varepsilon$ , заданной формулой

$$\chi_{A_\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_\varepsilon, \\ 0, & x \notin A_\varepsilon, \end{cases} \quad x = (x_1, x_2),$$

имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\chi_{A_\varepsilon}, u_m) = (\chi_{A_\varepsilon}, u).$$

Таким образом, учитывая, что

$$(\chi_{A_\varepsilon}, u_m) \leq \text{mes}(A_\varepsilon) \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_\infty(\Omega),$$

имеем неравенство

$$(\chi_{A_\varepsilon}, u) \leq \text{mes}(A_\varepsilon) \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_\infty(\Omega).$$

Но в силу определения множества  $A_\varepsilon$  справедлива оценка

$$(\chi_{A_\varepsilon}, u) \geq \text{mes}(A_\varepsilon) \left[ \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_\infty(\Omega) + \varepsilon \right], \quad \varepsilon > 0,$$

которая в сочетании с предыдущим соотношением приводит к тому, что  $\varepsilon \text{mes}(A_\varepsilon) \leq 0$  при  $\varepsilon > 0$ , т. е.  $\text{mes}(A_\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ .

Аналогичным образом убеждаемся, что мера множества

$$B_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in \Omega: u(x_1, x_2) \leq - \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_\infty(\Omega) - \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

тоже равна нулю. На основании этого заключаем, что

$$\|u\|_\infty(\Omega) \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_\infty(\Omega).$$

Следовательно, произведение слабых пределов  $uw$  принадлежит пространству  $L_2(\Omega)$ .

Для доказательства леммы достаточно установить сходимость при  $m \rightarrow \infty$  коэффициентов Фурье произведений  $u_m w_m$  (которые принадлежат пространству  $L_2(\Omega) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ ) к коэффициентам Фурье функции  $uw$  (это эквивалентно слабой сходимости в  $L_2(\Omega)$ ). Поэтому рассмотрим вопрос о предельном переходе при  $m \rightarrow \infty$  под символом

скалярного произведения  $(u_m w_m, \varphi_{k_1 k_2})$ , которое обозначим  $\Psi_{k_1, k_2}^{(m)}$ . Положим

$$\Psi_{k_1, k_2} = (uw, \varphi_{k_1, k_2}).$$

Итак, если

$$\Psi_{k_1, k_2}^{(m)} \rightarrow \Psi_{k_1, k_2}, \quad m \rightarrow \infty,$$

при любых целых  $k_1, k_2$ , то имеет место утверждение леммы.

Справедливы равенства

$$\Psi_{l_1, l_2}^{(m)} = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} a_{k_1, k_2}^{(m)} \bar{b}_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}^{(m)}, \quad l_1, l_2 \in \mathbb{Z}, \quad (6.23)$$

$$\Psi_{l_1, l_2} = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} a_{k_1, k_2} \bar{b}_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}, \quad l_1, l_2 \in \mathbb{Z}. \quad (6.24)$$

В силу соотношения (6.22) частичные конечные суммы ряда (6.23) сходятся при  $m \rightarrow \infty$  к соответствующим суммам ряда (6.24). Получим равномерные относительно  $m \in \mathbb{N}$  оценки «хвоста» ряда (6.23). Из формул для связи коэффициентов Фурье (6.21) имеем

$$|a_{k_1, k_2}^{(m)}| = \frac{|a'_{k_1, k_2}{}^{(m)}|}{|k_1|}, \quad k_1 \neq 0;$$

$$|b_{k_1, k_2}^{(m)}| = \frac{|b'_{k_1, k_2}{}^{(m)}|}{|k_2|}, \quad k_2 \neq 0.$$

Следовательно, выполняются оценки

$$\begin{aligned} & \sum_{|k_1| \geq M} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |a_{k_1, k_2}^{(m)}| |b_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}^{(m)}| \leq \\ & \leq \sum_{|k_1| \geq M} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \frac{|a'_{k_1, k_2}{}^{(m)}|}{|k_1|} |b_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}^{(m)}|, \quad M > 0, \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{|k_2| \geq M} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} |a_{k_1, k_2}^{(m)}| |b_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}^{(m)}| \leq \\ & \leq \sum_{|k_2 - l_2| \geq M} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} |a_{k_1, k_2}^{(m)}| \frac{|b'_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}{}^{(m)}|}{|k_2 - l_2|}, \quad M > 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Неравенства (6.25) и (6.26) аналогичны, поэтому ограничимся получением оценок для правой части (6.25), перенося результат автоматически на (6.26). Для усиления неравенства (6.25) воспользуемся

неравенством Коши–Буняковского, которое применим к правой части (6.25), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{|k_1| \geq M} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |a_{k_1, k_2}^{(m)}| |b_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}^{(m)}| \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{|k_1| \geq M} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \frac{|a_{k_1, k_2}^{(m)}|^2}{|k_1|^2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} |b_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}^{(m)}|^2 \right\}^{1/2}, \quad M > 0. \end{aligned}$$

Так как выполняется равенство

$$\|w_m\|_0(\Omega) = \left\{ \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} |b_{k_1, k_2}^{(m)}|^2 \right\}^{1/2},$$

то в силу ограниченности  $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|w_m\|_\infty(\Omega)$  справедливо неравенство

$$\sum_{|k_1| \geq M} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |a_{k_1, k_2}^{(m)}| |b_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}^{(m)}| \leq C \left\{ \sum_{|k_1| \geq M} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \frac{|a_{k_1, k_2}^{(m)}|^2}{|k_1|^2} \right\}^{1/2}, \quad (6.27)$$

при каждом  $M > 0$ ; постоянная  $C$  от номера  $m \in \mathbb{N}$  не зависит.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \xi_{k_1}^{(m)}(x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_1 u_m) \exp(-ik_1 x_1) dx_1, \\ |x_2| &\leq \pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} a_{k_1, k_2}^{(m)} &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \xi_{k_1}^{(m)}(x_2) \exp(-ik_2 x_2) dx_2, \\ k_1, k_2 &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, при каждом фиксированном  $k_1$  величины  $\{a_{k_1, k_2}^{(m)}\}$  ( $k_2 \in \mathbb{Z}$ ) являются коэффициентами Фурье функции  $\xi_{k_1}^{(m)}$  по ортонормированной системе в  $L_2[-\pi, \pi]$

$$\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-ik_2 x_2) \right\}_{k_2 \in \mathbb{Z}}.$$

В силу равенства Парсеваля [94] имеем

$$\sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |a_{k_1, k_2}^{(m)}|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\xi_{k_1}^{(m)}(x_2)|^2 dx_2, \quad k_1 \in \mathbb{Z}. \quad (6.28)$$

Оценивая интеграл в правой части этого соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\xi_{k_1}^{(m)}(x_2)|^2 dx_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_1 u_m) \exp(-ik_1 x_1) dx_1 \right|^2 dx_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_1 u_m) dx_1 \right)^2 dx_2 = \frac{1}{2\pi} \|\partial_1 u_m\|_1^2(\Omega), \\ &k_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Поскольку по условию леммы

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|\partial_1 u_m\|_1(\Omega) < \infty,$$

имеем оценку

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\xi_{k_1}^{(m)}(x_2)|^2 dx_2 \leq c_1 < \infty, \quad k_1 \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где постоянная  $c_1$  от номеров  $k_1, m$  не зависит. Учитывая это неравенство в (6.28), имеем

$$\sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |a'_{k_1, k_2}{}^{(m)}|^2 \leq c_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и усиливая (6.27), получаем

$$\sum_{|k_1| \geq M} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |a_{k_1, k_2}^{(m)}| |b_{k_1 - l_1, k_2 - l_2}^{(m)}| \leq c_2 \sum_{|k_1| \geq M} \frac{1}{|k_1|^2}, \quad M > 0,$$

где постоянная  $c_2$  от номера  $m \in \mathbb{N}$  не зависит. Аналогичные оценки получаются для соотношения (6.26). Найденные оценки для мажоранты ряда (6.23) означают, что ряд сходится равномерно относительно номера  $m \in \mathbb{N}$ , следовательно,

$$\Psi_{k_1, k_2}^{(m)} \rightarrow \Psi_{k_1, k_2}, \quad m \rightarrow \infty,$$

при любых целых  $k_1, k_2$ . Это соотношение эквивалентно утверждению леммы. Лемма доказана. ■

### Доказательство теоремы 6.3

□ Пусть  $\Omega$  — компактная область в  $\mathbb{R}_2$ . Погрузим множество  $\Omega$  в квадрат  $\Omega'$  так, чтобы  $\partial\Omega \cap \partial\Omega' = \emptyset$ . Очевидно, результат леммы 6.7 распространяется на квадрат  $\Omega'$  заменой переменных, отображающей квадрат  $\Omega'$  на квадрат  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}_2$ . Используя средние функции на  $\Omega$ , аппроксимируем гладкими функциями  $\tilde{u}_m$ ,

$\tilde{w}_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , на  $\Omega'$  соответствующие элементы последовательностей  $u_m$  и  $w_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \|u_m - \tilde{u}_m\|_\infty(\Omega') &\leq 2\|u_m\|_\infty(\Omega'), \\ \|w_m - \tilde{w}_m\|_\infty(\Omega') &\leq 2\|w_m\|_\infty(\Omega'), \\ \max\{\|u_m - \tilde{u}_m\|_0(\Omega'), \|\partial_1 u_m - \partial_1 \tilde{u}_m\|_1(\Omega'), \\ \|w_m - \tilde{w}_m\|_0, \|\partial_2 w_m - \partial_2 \tilde{w}_m\|_2(\Omega')\} &\leq \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, для функций  $\tilde{u}_m, \tilde{w}_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) имеет место утверждение леммы 6.7 на квадрате  $\Omega'$ , т. е. для любой функции  $\varphi \in L_2(\Omega')$  справедливо соотношение

$$\int_{\Omega'} \tilde{u}_m \tilde{w}_m \bar{\varphi} \, dx_1 \, dx_2 \rightarrow \int_{\Omega} u w \bar{\varphi} \, dx_1 \, dx_2, \quad m \rightarrow \infty,$$

где  $u, w$  — слабые пределы в пространстве  $L_2(\Omega')$  последовательностей функций  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  и  $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  соответственно. Поскольку

$$\|\tilde{u}_m \tilde{w}_m - u_m w_m\|_0(\Omega') \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

то аналогичное утверждение справедливо для произведений  $u_m w_m$ :

$$\int_{\Omega'} u_m w_m \bar{\varphi} \, dx_1 \, dx_2 \rightarrow \int_{\Omega'} u w \bar{\varphi} \, dx_1 \, dx_2, \quad m \rightarrow \infty \forall \varphi \in L_2(\Omega').$$

Переходя к окончанию доказательства, рассмотрим теперь пробную функцию  $\varphi = \chi_\Omega \psi$ , где  $\chi_\Omega$  — характеристическая функция компактной области  $\Omega$ ,  $\psi$  — произвольная непрерывная на пространстве  $\mathbb{R}_2$  функция. Тогда имеем

$$\int_{\Omega} u_m w_m \psi \, dx_1 \, dx_2 \rightarrow \int_{\Omega} u^1 u^2 \psi \, dx_1 \, dx_2, \quad m \rightarrow \infty, \quad \forall \psi \in C(\Omega).$$

Поскольку множество непрерывных на  $\Omega$  функций  $C(\Omega)$  всюду плотное в пространстве  $L_2(\Omega)$ , то, следовательно, в последнем соотношении функцию  $\psi$  можно считать принадлежащей пространству  $L_2(\Omega)$ . Теорема доказана. ■

## § 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2.

### СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (6.1), (6.2)

□ Отметим, что правая часть уравнений (6.17), которую обозначим  $S_{i,n}(u)$ , при неотрицательных  $\{u_i\}_{i=1}^n$  удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^n i S_{i,n} \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

из-за симметричности и неотрицательности  $\Phi_{i,j}$  ( $i, j \in \mathbb{N}$ ). Положим в дополнение к требованиям теоремы, что функции  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  гладкие, стремящиеся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ . Тогда, интегрируя уравнения (6.17) по переменным  $x, t$  с учетом лемм 6.2, 6.4, 6.5, получим неравенства

$$\int_0^t \sum_{j=1}^n j v_j u_j(x, \tau) d\tau \leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n j \varphi_j(x) dx \leq M, \quad (6.29)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n j u_j(x, \tau) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n j \varphi_j(x) dx \leq M. \quad (6.30)$$

Введем обозначения

$$f_i^{(n)}(x, t) = \begin{cases} u_i(x, t), & 1 \leq i \leq n, \\ 0, & i > n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

при помощи которых неравенства (6.29), (6.30) приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} j v_j f_j^{(n)}(x, \tau) d\tau \leq M, \\ \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{\infty} j f_j^{(n)}(x, \tau) dx \leq M, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (6.31)$$

В силу утверждения леммы 6.5 о равномерной ограниченности относительно номера  $n \in \mathbb{N}$  (при фиксированных значениях индекса  $i$ ) функций  $f_i^{(n)}$  ( $i, n \in \mathbb{N}$ ) на каждом компакте  $\Omega$  в  $\mathbb{R}_2$  из последовательности функций  $\{f_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$ , зависящей от номера  $n \in \mathbb{N}$ , выберем стандартным диагональным процессом подпоследовательность  $\{f_i^{(n_k)}\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $n_k \in \mathbb{N}$ , слабо сходящуюся в пространстве  $L_2(\Omega)$  при  $n_k \rightarrow \infty$  на каждом компакте  $\Omega$ , принадлежащем  $\Pi$ . Слабые пределы последовательностей  $f_i^{(n_k)}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , получающиеся при  $n_k \rightarrow \infty$ , обозначим  $f_i$ . Очевидно, функции  $f_i \forall i \in \mathbb{N}$  имеют ограниченный существенный максимум на каждом компакте в полуплоскости  $\Pi$  и почти везде неотрицательны. Рассмотрим значения индексов  $i, j \in \mathbb{N}$ , для которых  $v_i \neq v_j$ . В функциях  $f_i^{(n_k)}$  и  $f_j^{(n_k)}$  перейдем к новым аргументам, определенным соотношениями

$$\begin{cases} t = x_1 + x_2, \\ x = v_i x_1 + v_j x_2. \end{cases} \quad (6.32)$$



Обозначим

$$\begin{cases} u_{n_k}(x_1, x_2) = f_i^{(n_k)}(x, t), \\ w_{n_k}(x_1, x_2) = f_j^{(n_k)}(x, t). \end{cases} \quad (6.33)$$

Замена переменных (6.32) переводит прямую  $(x + v_i\tau, \tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  в линию  $x_2 = \text{const}$ , а прямую  $(x + v_j\tau, \tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  — в линию  $x_1 = \text{const}$ . Поскольку в силу (6.32), (6.33) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} f_i^{(n_k)}(x + v_i\tau, \tau) &= \partial_1 u_{n_k}, & x_2 &= \text{const}, \\ \frac{d}{d\tau} f_j^{(n_k)}(x + v_j\tau, \tau) &= \partial_2 w_{n_k}, & x_1 &= \text{const}, \end{aligned}$$

то из леммы 6.6 следует равномерная ограниченность относительно  $n_k \in \mathbb{N}$  следующих интегралов:

$$\int_{\Omega \cap (x_2 = \text{const})} |\partial_1 u_{n_k}| dx_1, \quad \int_{\Omega \cap (x_1 = \text{const})} |\partial_2 w_{n_k}| dx_2, \quad n_k \in \mathbb{N},$$

для любой компактной области  $\Omega$  в  $\mathbb{R}_2$ . Тем самым устанавливается, что равномерно по  $n_k \in \mathbb{N}$  ограничены нормы

$$\|\partial_1 u_{n_k}\|_1(\Omega), \quad \|\partial_2 w_{n_k}\|_2(\Omega).$$

Применяя к произведению функций  $u_{n_k} w_{n_k}$  результат теоремы 6.3, получаем, что

$$f_i^{(n_k)} f_j^{(n_k)} \rightarrow f_i f_j, \quad n_k \rightarrow \infty \quad (6.34)$$

слабо в пространстве  $L_2(\Omega)$  для любого компакта  $\Omega$  в полуплоскости  $\Pi$ , если  $v_i \neq v_j$ .

Проинтегрируем уравнения (6.17) на  $\Pi$  с весом  $\psi \in \Psi$ . Учитывая принятые ранее обозначения, имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) f_i^{(n_k)} + \psi S_{i, n_k} \right] dx dt + \\ + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \varphi_i(x) dx = 0, \quad 1 \leq i \leq n_k. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Учитывая требования теоремы на  $\sigma_{i,j}$ ,  $v_i$ , в неравенстве (6.31) получаем оценку

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} \sum_{j \geq l} \sigma_{i,j} |v_i - v_j| f_j^{(n_k)}(x, t) \psi(x, t) dx dt \leq \frac{C(i, \psi, M)}{l^{1-\gamma}}, \\ 0 \leq \gamma < 1, \quad l \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

где постоянная  $C(i, \psi, M)$  от номера  $n_k \in \mathbb{N}$  не зависит. Поскольку коэффициент  $\Phi_{i,j}$  равен 0 для значений индексов  $i, j$ , когда  $v_i = v_j$ , то соотношение (6.34) обеспечивает слабую непрерывность операторов  $S_{i,n}$  на последовательности  $f^{(n_k)}$  при любых значениях индексов  $i, n$ , т. е. справедливо соотношение

$$S_{i,n}(f^{(n_k)}) \rightarrow S_{i,n}(f), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (6.37)$$

слабо в пространстве  $L_2(\Omega)$  при  $n_k \rightarrow \infty$ , где  $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\Omega$  — произвольный компакт в полуплоскости  $\Pi$ . Сочетая (6.36) и (6.37), имеем на  $\Omega$

$$S_i(f^{(n_k)}) \rightarrow S_i(f), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (6.38)$$

слабо в пространстве  $L_2(\Omega)$  при  $n_k \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу  $n_k \rightarrow \infty$  в (6.35), с учетом (6.38) окончательно получаем

$$\iint_{\Pi} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) f_i + \psi S_i(f) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \varphi_i(x) dx = 0$$

$$\forall \psi \in \Psi, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (6.39)$$

Значит,  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — обобщенное решение задачи (6.1), (6.2) при гладких начальных данных  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Переход к функциям  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , указанным в условиях теоремы, осуществляется посредством аппроксимации в метрике  $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R})$  измеримых начальных данных гладкими функциями, на которых равномерно выполнены требуемые условиями теоремы оценки функций  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Переходя к пределу в (6.39) по подпоследовательности решений, соответствующих гладким начальным данным с учетом слабой непрерывности оператора  $S$ , получаем окончательное утверждение теоремы. Теорема доказана. ■

**Замечание 6.8.** Если последовательность скоростей свободного переноса  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , указанная в теореме, является ограниченной, то вместо условия (6.15) достаточно потребовать локальную суммируемость по мере Лебега  $dx$  на  $\mathbb{R}$  ряда

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} i \varphi_i(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Следствие 6.1.** Обобщенное решение задачи (6.1), (6.2) почти везде на  $\Pi$  удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению вольтерровского вида

$$f = T_t \varphi + \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f(\cdot, \tau)) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (6.40)$$

Действительно, соотношение (6.39) выполняется, если в качестве пробных функций  $\psi$  выбрать ограниченные почти везде на  $\Pi$  дифференцируемые финитные функции. Положим

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad t_0 > 0, \quad 0 < h < t_0.$$

Обозначим

$$\begin{cases} \theta_h(t) = 1, & 0 \leq t \leq t_0 - h, \\ \frac{1}{h}(t_0 - t), & t_0 - h \leq t \leq t_0, \\ 0, & t \geq t_0. \end{cases}$$

Пусть  $\omega_h$  — семейство  $C^\infty(\mathbb{R})$  гладких финитных, неотрицательных усредняющих ядер в точке  $x = 0$  и

$$\psi(x, t) = \omega_h(x - x_0 + v_i(t_0 - \tau))\theta_h(\tau).$$

Очевидно,  $\psi$  — ограниченная финитная почти везде дифференцируемая функция на  $\Pi$ . Подставляя ее в (6.39) и устремляя  $h \rightarrow 0$ , почти для всякой точки в полуплоскости  $\Pi$  получаем равенство (6.40). Последнее утверждение вытекает из теоремы Лебега [94, 139] для средних функций.

## § 7. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МАСС

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}_3$  в вязкой среде, заполненной частицами различной массы  $\mu \in \mathbb{R}^+$ , происходит процесс коагуляции при парных соударениях частиц с интенсивностью

$$\Phi(\mu, \mu_1) \geq 0,$$

где  $\mu$  и  $\mu_1$  — массы сталкивающихся частиц. Если при этом частицы движутся между столкновениями вдоль оси

$$Ox = \{x, 0, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}_1,$$

под действием внешней силы с установившейся скоростью  $\{v(\mu), 0, 0\}$ , то принятой математической моделью указанного процесса является кинетическое уравнение Смолуховского для непре-

рывных масс [28]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mu, x, t)}{\partial t} + v(\mu) \frac{\partial f(\mu, x, t)}{\partial x} &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\mu \Phi(\mu - \mu_1, \mu_1) f(\mu - \mu_1, x, t) f(\mu_1, x, t) d\mu_1 - \\ &- f(\mu, x, t) \int_0^\infty \Phi(\mu, \mu_1) f(\mu_1, x, t) d\mu_1, \quad x, \mu \geq 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Для уравнения (6.41) рассматривается задача Коши с начальной функцией

$$f(\mu, x, 0) = f^{(0)}(\mu, x), \quad \mu, x \in \Pi_0 = \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1. \quad (6.42)$$

Скорость начального переноса частиц  $v$  в физически реальных ситуациях имеет степенной характер [28], например, для сфер, падающих по закону Стокса,

$$v(\mu) \sim \mu^{2/3}, \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Аналогично рассмотренному выше случаю дискретных коагулирующих масс в задаче Коши (6.41), (6.42) также имеет место возникновение негладких особенностей решения при сколь угодно гладких начальных данных. Причина возникновения особенностей — взаимодействие свободного переноса частиц и их соударений. Поскольку конструкция примера, демонстрирующего механизм возникновения особенностей решения задачи (6.41), (6.42), полностью повторяет идеи § 2 настоящей главы, то его описание опускаем.

Предметом дальнейшего исследования являются обобщенные решения задачи (6.41), (6.42), которые определим как решения нелинейного интегрального уравнения вольтерровского вида, получающегося из (6.41), (6.42) интегрированием вдоль характеристик. В отличие от случая дискретных масс условие обращения ядра коагуляции в нуль при одинаковых значениях аргументов ниже не накладывается, но взамен появляются ограничения на его рост и монотонность по каждому аргументу, что позволяет доказать корректность задачи Коши в подходящих пространствах. Кроме того, важным моментом для построения устойчивого решения является требование степенного роста скорости свободного переноса частиц на бесконечности. Подчеркнем, что математические методы построения обобщенного решения в рассматриваемой ситуации непрерывных масс коагулирующих частиц совершенно отличны от случая

дискретных масс, что, прежде всего, обусловлено различной топологической природой пространства  $\Omega$  состояний частиц в указанных задачах.

Фиксируем класс скоростей свободного переноса.

**Определение 6.2.** Будем говорить, что непрерывная на  $\mathbb{R}^+$  функция  $v$  принадлежит классу  $\mathcal{V}$ , если для нее можно указать такое число  $a \in \mathbb{R}^+$ , что при  $\mu \geq a$  существует непрерывная производная  $v'$ , поведение которой подчиняется неравенству

$$|v'(\mu)| \geq c(a)\mu^\gamma, \quad \mu \geq a,$$

с постоянными  $c(a) > 0$ ,  $\gamma > -1$ .

На пространстве  $L_\infty(\Pi_0)$  функций  $f$ , имеющих ограниченный существенный максимум  $\|f\|_\infty(\Pi_0)$ , определим действие однопараметрической группы преобразований свободного переноса

$$\begin{aligned} T_t^v: L_\infty &\rightarrow L_\infty, \\ t \in \mathbb{R}, \quad v &\in \mathcal{V}, \end{aligned}$$

следующей формулой:

$$T_t^v(f)(\mu, x) = f(\mu, x - v(\mu)t), \quad (\mu, x) \in \Pi_0.$$

**Определение 6.3.** Обозначим через  $\sum_0$  множество начальных данных, состоящее из функций  $f_0 \in L_\infty(\Pi_0)$ , почти везде неотрицательных на  $\Pi_0$  и подчиняющихся условиям

$$\int_{\Pi_0} (1 + \mu) f^{(0)}(\mu, x) d\mu \otimes dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^+} T_t^v f^{(0)} d\mu < \infty,$$

$$\forall T \in \mathbb{R}^+, \quad v \in \mathcal{V}.$$

**Определение 6.4.** Обозначим через  $\mathcal{K}$  класс непрерывных, симметричных, ограниченных на  $\mathbb{R}_2^+$  функций  $\Phi: \mathbb{R}_2^+ \rightarrow \mathbb{R}_1^+$  таких, что при каждом  $\mu_1 \in \mathbb{R}_1^+$  функция  $\Phi(\cdot, \mu_1): \mu \mapsto \Phi(\mu, \mu_1)$  неубывающая, когда  $\mu \geq \mu_1$ .

**Определение 6.5.** Назовем *обобщенным решением задачи* (6.41), (6.42) измеримую функцию  $f$  на множестве

$$\Pi = \{(\mu, x, t) \in \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_1^+\},$$

удовлетворяющую почти везде (в смысле лебеговой меры  $d\mu \otimes dx \otimes dt$ ) на  $\Pi$  интегральному уравнению вольтерровского вида

$$f(\mu, x, t) = T_t^v(f^{(0)})(\mu, x) + \int_0^t T_{t-\tau}^v \circ S(f(\cdot, \cdot, t))(\mu, x) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (6.43)$$

где  $S$  — оператор столкновений коагуляции, определенный соотношением (1.8).

Пусть  $\Theta$  — функция Хевисайда на  $\mathbb{R}$ ,

$$\chi_n(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \Theta(\mu - n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для построения решения уравнения (6.43) рассмотрим вспомогательные задачи, которые получены из (6.43) заменой оператора  $S(f)$  на  $S_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_n S(\chi_n f)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$f_n = T_t^v(\chi_n f^{(0)}) + \int_0^t T_{t-\tau}^v \circ S_n(f_n(\cdot, \cdot, \tau)) d\tau, \quad (6.44)$$

$$t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Перейдем к рассмотрению условий корректности задачи (6.44) при  $t \geq 0$ . Построение решения в целом существенно использует принцип максимума (теорема 10.14).

### § 8. КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ (6.44)

В этом разделе основным результатом является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 6.4.** Пусть функция

$$f^{(0)} \in L_\infty(\Pi_0) \cap C(\Pi_0)$$

имеет на множестве  $\Pi_0$  непрерывную производную по переменной  $x \in \mathbb{R}$  и предположим, что  $f^{(0)} \geq 0$ ,  $\Phi \in \mathcal{X}$ . Тогда при каждом номере  $n \in \mathbb{N}$  уравнение (6.44) обладает на множестве

$$\Pi_n = I_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad I_n = \{\mu: 0 \leq \mu \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

единственным непрерывным решением  $f_n$ , которое непрерывно дифференцируемое по  $x, t$ , неотрицательное на  $\Pi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и подчиняется неравенству

$$\|f_n\|_\infty(\Pi_n) \leq \|f^{(0)}\|_\infty(\Pi_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.45)$$

Доказательству этой теоремы предположим ряд вспомогательных утверждений.

При каждом номере  $n \in \mathbb{N}$  оператор  $S_n$ , определенный в § 7, действует как отображение

$$S_n: L_\infty(\Pi_0) \rightarrow L_\infty(\Pi_0),$$

и является локально липшиц-непрерывным в норме  $\|\cdot\|_\infty(\Pi_0)$  в силу своей квадратичности и конечности области интегрирования за счет обрезающего множителя  $\chi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку носители  $S_n(f)$  и  $\chi_n f^{(0)}$  сосредоточены на интервале

$$I_n = \{\mu: 0 \leq \mu \leq n, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

то уравнение (6.44) можно рассматривать на множестве аргументов  $\Pi_n$ , ибо на  $\Pi \setminus \Pi_n$  решение  $f_n$  тождественно равно 0. Отметим, что в силу требований на класс ядер  $\Phi \in \mathcal{K}$  оператор  $S_n$  переводит множество непрерывных функций  $C(I_n)$  в себя.

**Лемма 6.8.** Пусть непрерывная неотрицательная функция  $f$  на отрезке  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , достигает наибольшего значения в точке  $\mu^* \in I_n$ . Тогда при любом ядре  $\Phi \in \mathcal{K}$  справедливо неравенство

$$S_n(f)(\mu^*) \leq 0.$$

□ В силу симметричности функции  $\Phi$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} S_n(f)(\mu) &= \int_0^{\mu/2} \Phi(\mu - \mu_1, \mu_1) f(\mu - \mu_1) f(\mu_1) d\mu_1 - \\ &\quad - f(\mu) \int_0^n \Phi(\mu, \mu_1) f(\mu_1) d\mu_1, \\ &\quad 0 \leq \mu \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Выделим из вычитаемого в правой части этого соотношения величину

$$-f(\mu) \int_0^\mu \Phi(\mu, \mu_1) f(\mu_1) d\mu_1,$$

которую объединим с уменьшаемым. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_n(f)(\mu^*) &= \int_0^{\mu^*/2} [\Phi(\mu^* - \mu_1, \mu_1) f(\mu^* - \mu_1) - \\ &\quad - \Phi(\mu^*, \mu_1) f(\mu^*)] f(\mu_1) d\mu_1 - f(\mu^*) \int_{\mu^*}^n \Phi(\mu^*, \mu_1) f(\mu_1) d\mu_1. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части полученного равенства неположительное, так как

$$f(\mu^*) \geq f(\mu^* - \mu_1), \quad 0 \leq \mu_1 \leq \mu^*,$$

и кроме того,

$$\Phi(\mu^* - \mu_1, \mu_1) \leq \Phi(\mu^*, \mu_1), \quad 0 \leq \mu_1 \leq \frac{\mu^*}{2},$$

за счет монотонного возрастания функции  $\Phi(\mu, \mu_1)$  по аргументу  $\mu$  при  $\mu \geq \mu_1$ . Из неотрицательности  $f$  и  $\Phi$  следует неположительность второго слагаемого. Таким образом,

$$S_n(f)(\mu^*) \leq 0.$$

Лемма доказана. ■

**Лемма 6.9.** Пусть  $v \in C(\mathbb{R})$ , функция

$$f^{(0)} \in L_\infty(\Pi_0) \cap C(\Pi_0)$$

имеет на  $\Pi_0$  непрерывную производную по переменной  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда уравнение (6.44) имеет локальное решение при  $t \geq 0$ , причем интервал существования решения пропорционален

$$\|f^{(0)}\|_\infty^{-1}(\Pi_0),$$

а само решение непрерывно зависит от  $f^{(0)}$  в топологии равномерной сходимости на компактах.

Утверждение леммы получается применением теоремы о неподвижной точке для локально сжимающего в  $L_\infty$  оператора, определенного правой частью (6.44). Поскольку постоянная сжатия пропорциональна  $\tau \|f^{(0)}\|_\infty(\Pi_0)$ , где  $\tau > 0$  — длина интервала существования решения, то

$$\tau \sim \|f^{(0)}\|_\infty^{-1}(\Pi_0).$$

Характер зависимости решения от начальных данных обусловлен ограниченностью функции  $v$  при  $0 \leq \mu \leq n$ , что определяет наклон поля характеристик для оператора переноса

$$\frac{\partial}{\partial t} + v(\mu) \frac{\partial}{\partial x}.$$

#### Доказательство теоремы 6.4

□ Неотрицательность локального решения доказывается посредством аппроксимации неотрицательных начальных данных строго положительными функциями. Свойство положительности наследуется на решении при  $t > 0$ , что устанавливается методом, аналогичным рассуждениям леммы 6.4. В силу устойчивости локального решения предельный переход по положительным начальным данным, стремящимся к неотрицательной начальной функции, приводит к неотрицательности соответствующего решения.



Получим теперь оценку (6.45), которая позволяет построить продолжение локального неотрицательного решения на все  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Рассмотрим сначала случай начальной функции  $f^{(0)}$ , являющейся финитной по  $x \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющей условиям теоремы. В силу ограниченности функции  $v$  при  $\mu \in I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , локальное решение наследует свойства начальных данных на интервале существования. Пусть величина  $T > 0$  находится внутри интервала существования этого решения. Рассмотрим цилиндр

$$\bar{Q}(T) = \{(\mu, x, t) : |x| \leq X, \mu \in I_n, 0 \leq t \leq T, T > 0, X > 0\},$$

который выберем так, чтобы

$$f_n \equiv 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq X, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Фиксируем  $t \in (0, T]$  и рассмотрим точки

$$(\mu^*, x, t) \in \bar{Q}(T),$$

в которых

$$f_n(\mu^*, x, t) = \max_{\substack{(\mu, x) \\ (\mu^*, x, t) \in \bar{Q}(T) \cap t = \text{const}}} f_n(\mu, x, t \in \bar{Q}(T)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial f_n(\mu^*, x, t)}{\partial x} = 0,$$

а в силу леммы 6.8

$$S_n(f_n)(\mu^*, x, t) \leq 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f_n(\mu^*, x, t)}{\partial t} \leq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя принцип максимума из теоремы 10.14 (см. Дополнение, гл. 10), имеем

$$\max_{\bar{Q}(T)} f_n \leq \max_{(\mu, x) \in \bar{Q}(0)} f_n^{(0)}(\mu, x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.46)$$

Аппроксимируем начальные данные  $f^{(0)}$  в теореме 6.4 последовательностью финитных неотрицательных функций, равномерно сходящихся к  $f^{(0)}$  на компактах в  $\Pi_0$ . Сочетая свойство устойчивости решения и оценку (6.46) для финитных начальных данных, получаем оценку (6.45). Тем самым имеем возможность продолжения локального решения на неотрицательные значения времени  $t$ . Теорема доказана. ■

**§ 9. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (6.44)**

Обозначим  $L_1^{(T)}$ ,  $T \geq 0$  пространство классов эквивалентности вещественных измеримых функций на

$$\Pi(T) = \Pi_0 \times [0, T],$$

имеющих ограниченную норму

$$\|f\|^{(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Pi_0} |f(\mu, x, t)| d\mu \otimes dx.$$

**Лемма 6.10.** При каждом номере  $n \in \mathbb{N}$  и  $T \geq 0$  для непрерывных на  $\Pi_n$  неотрицательных решений уравнения (6.44)  $f_n^{(1)}$  и  $f_n^{(2)}$  справедлива оценка

$$\|f_n^{(1)} - f_n^{(2)}\|^{(T)} \leq c \|f_n^{(1)}(\cdot, 0) - f_n^{(2)}(\cdot, 0)\|^{(0)}, \quad (6.47)$$

где постоянная  $c$  зависит от  $n$ ,  $\|\Phi\|_\infty$ , а также от значений

$$\max\{\|f_n^{(1)}(\cdot, 0)\|_\infty(\Pi_0), \|f_n^{(2)}(\cdot, 0)\|_\infty(\Pi_0)\}.$$

□ Справедливо равенство

$$\begin{aligned} & (f_n^{(1)} - f_n^{(2)})|_{(\mu, x, t)} = T_t^v [\chi_n(f_n^{(1)}(\cdot, 0) - f_n^{(2)}(\cdot, 0))]|_{(\mu, x)} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t T_{t-\tau}^v \left\{ \int_0^\mu \Phi(\mu - \mu_1, \mu_1) [f_n^{(1)}(\mu - \mu_1, \cdot, \tau) - f_n^{(2)}(\mu - \mu_1, \cdot, \tau)] \times \right. \\ & \times [f_n^{(1)}(\mu, \cdot, \tau) + f_n^{(2)}(\mu, \cdot, \tau)] d\mu_1 - \\ & - [f_n^{(1)}(\mu, \cdot, \tau) - f_n^{(2)}(\mu, \cdot, \tau)] \times \\ & \times \int_0^n \Phi(\mu, \mu_1) [f_n^{(1)}(\mu_1, \cdot, \tau) + f_n^{(2)}(\mu_1, \cdot, \tau)] d\mu_1 - \\ & - [f_n^{(1)}(\mu, \cdot, \tau) + f_n^{(2)}(\mu, \cdot, \tau)] \times \\ & \left. \times \int_0^n \Phi(\mu, \mu_1) [f_n^{(1)}(\mu_1, \cdot, \tau) - f_n^{(2)}(\mu_1, \cdot, \tau)] d\mu_1 \right\} d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В силу оценки (6.45) получаем

$$\begin{aligned} & |f_n^{(1)} - f_n^{(2)}| \leq T_t^v |\chi_n(f_n^{(1)}(\cdot, 0) - f_n^{(2)}(\cdot, 0))| + \\ & + \|\Phi\|_\infty \max\{\|f_n^{(1)}(\cdot, 0)\|_\infty(\Pi_0), \|f_n^{(2)}(\cdot, 0)\|_\infty(\Pi_0)\} \times \\ & \times \int_0^t T_{t-\tau}^v \chi_n \left\{ \int_0^\mu |f_n^{(1)}(\mu_1, \cdot, \tau) - f_n^{(2)}(\mu_1, \cdot, \tau)| d\mu_1 + \right. \\ & + |f_n^{(1)}(\mu, \cdot, \tau) - f_n^{(2)}(\mu, \cdot, \tau)| n + \\ & \left. + \int_0^n |f_n^{(1)}(\mu_1, \cdot, \tau) - f_n^{(2)}(\mu_1, \cdot, \tau)| d\mu_1 \right\} d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Учитывая, что функции  $f_n^{(1)}$  и  $f_n^{(2)}$  обращаются в нуль при  $\mu > n$ , проинтегрируем обе части последнего неравенства по мере  $d\mu \otimes dx$  на  $\Pi_0$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu, x, t) - f_n^{(2)}(\mu, x, t)| d\mu \otimes dx \leq \\ & \leq \int_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu, x, 0) - f_n^{(2)}(\mu, x, 0)| d\mu \otimes dx + \\ & + \|\Phi\|_\infty \max\{\|f_n^{(1)}(\cdot, 0)\|_\infty(\Pi_0), \|f_n^{(2)}(\cdot, 0)\|_\infty(\Pi_0)\} \times \\ & \times 3n \int_0^t \int_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu, x, \tau) - f_n^{(2)}(\mu, x, \tau)| d\mu \otimes dx d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Применяя в этом неравенстве лемму Гроуолла [172] к переменной

$$\int_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu, x, t) - f_n^{(2)}(\mu, x, t)| d\mu \otimes dx,$$

предполагая финитность и гладкость функций  $f_n^{(1)}(\cdot, 0)$ ,  $f_n^{(2)}(\cdot, 0)$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu, x, t) - f_n^{(2)}(\mu, x, t)| d\mu \otimes dx \leq \|f_n^{(1)}(\cdot, 0) - f_n^{(2)}(\cdot, 0)\|^{(0)} \times \\ & \times \exp\{3n\|\Phi\|_\infty \max[\|f_n^{(1)}(\cdot, 0)\|_\infty(\Pi_0), \|f_n^{(2)}(\cdot, 0)\|_\infty(\Pi_0)]T\}, \\ & 0 \leq t \leq T, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Прямым следствием этой оценки является (6.47). Аппроксимируя начальные данные последовательностью финитных функций, предельным переходом получаем утверждение леммы. Лемма доказана. ■

**Следствие 6.2.** Поскольку множество начальных данных  $f^{(0)}$  из теоремы 6.4 всюду плотное в  $L_1^{(0)}(\Pi_0) \cap L_\infty^+(\Pi_0)$  относительно нормы  $\|\cdot\|^{(0)}$ , то в силу оценки (6.47) уравнение (6.44) имеет единственное решение в  $L_\infty(\Pi)$  при начальной функции  $f^{(0)} \in L_\infty^+(\Pi_0)$ , которая почти везде неотрицательная на  $\Pi_0$ , причем на этом решении выполняется оценка, указанная в теореме 6.4.

**Лемма 6.11.** На неотрицательных решениях  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , уравнения (6.44) имеют место оценки

$$\int_{\Pi_0} (1+\mu) f_n(\mu, x, t) d\mu \otimes dx \leq \int_{\Pi_0} (1+\mu) f^{(0)}(\mu, x) d\mu \otimes dx, \quad t \geq 0. \quad (6.48)$$

□ Отметим, что для неотрицательной функции  $f$  справедливы неравенства

$$\int_0^n S_n(f) d\mu \leq 0, \quad \int_0^n S_n(f) \mu d\mu \leq 0, \quad (6.49)$$

$$n \in \mathbb{N},$$

обусловленные неотрицательностью и симметричностью функции  $\Phi$ . Для финитных по переменной  $x \in \mathbb{R}$  решений уравнения (6.44) имеют место формулы

$$\int_{\mathbb{R}} (1+\mu) f_n(\mu, x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} (1+\mu) \chi_n f^{(0)}(\mu, x) dx +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1+\mu) S_n(f^{(n)}(\cdot, x, \tau)) dx d\tau, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.50)$$

Это соотношение обусловлено тем, что группа  $T_t^v$  действует на функции только по переменной  $x$  как оператор сдвига

$$x \mapsto x - v(\mu)t.$$

Интегрируя тождество (6.50) по переменной  $\mu$  с учетом неравенства (6.49), получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^n (1+\mu) f_n(\mu, x, t) d\mu dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} (1+\mu) f^{(0)}(\mu, x, t) d\mu dx, \quad (6.51)$$

$$t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство леммы завершаем предельным переходом по последовательности финитных начальных данных, сходящихся в норме  $\|\cdot\|^{(0)}$ , поскольку (6.51) переходит в (6.48). Лемма доказана. ■

Перейдем теперь к получению оценки интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_n(\mu, x, t) d\mu,$$

равномерной по  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , что является ключевым моментом для построения решения задачи (6.43).

**Лемма 6.12.** Пусть

$$(v, \Phi) \in \mathcal{V} \times \mathcal{K}, \quad \{^0 \in \cap \mathcal{C}(\cdot).$$

Тогда для последовательности решений задачи (6.44) на любом промежутке изменения времени  $0 \leq t \leq T$  можно указать такую постоянную  $c(T) < \infty$ , не зависящую от номера  $n \in \mathbb{N}$ , что

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ x \in \mathbb{R}}} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(\mu, x, t) d\mu \leq c(T), \quad n \in \mathbb{N}.$$

□ В силу неотрицательности функции  $f_n$  отбрасыванием неположительных членов в правой части (6.44) получаем неравенство

$$\begin{aligned} f_n(\mu, x, t) &\leq f^{(0)}(\mu, x - v(\mu)t) + \frac{1}{2} \|\Phi\|_{\infty} \times \\ &\times \chi_n(\mu) \int_0^t T_{t-\tau}^v \left\{ \int_0^\mu f_n(\mu - \mu_1, \cdot, \tau) f_n(\mu_1, \cdot, \tau) d\mu_1 \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим

$$g_n(\mu, x, t) = \chi_n(\mu) \int_0^\mu f_n(\mu - \mu_1, x, \tau) f_n(\mu_1, x, \tau) d\mu_1.$$

Пусть величины  $1 < p, q < +\infty$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Из неравенства Гельдера следует соотношение [94]

$$\begin{aligned} \int_a^\infty T_{t-\tau}^v g_n(\mu, \cdot, \tau) d\mu &\leq \left\{ \int_a^\infty T_{t-\tau}^v g_n(\mu, \cdot, \tau) |v'(\mu)|(1 + \mu)^{1-p} d\mu \right\}^{1/p} \times \\ &\times \left\{ \int_a^\infty T_{t-\tau}^v g_n(\mu, \cdot, \tau) |v'(\mu)|(1 + \mu) d\mu \right\}^{1/q}, \\ a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

При получении этого неравенства в левой части его использовалось тождество

$$\frac{[v'(\mu)|(1+\mu)]^{1/q}}{[v'(\mu)|(1+\mu)]^{1/q}} \equiv 1,$$

причем знаменатель возводился в степень  $p$  в правой части оценки, а числитель соответственно — в степень  $q$ . Усилим имеющуюся оценку

$$\int_a^\infty T_{t-\tau}^v g_n(\mu, \cdot, \tau) d\mu \leq \left\{ \int_a^\infty \sup_{\xi \in \mathbb{R}} g_n(\mu, \xi, \tau) [v'(\mu)|(1+\mu)]^{1-p} d\mu \right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^\infty T_{t-\tau}^v \sup_{\eta \in \mathbb{R}} (1+\eta) g_n(\eta, \cdot, \tau) |v'(\mu)|(1+\mu) d\mu \right\}^{1/q},$$

$a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

(6.53)

Оценим выражения, входящие в правую часть неравенства (6.53). Поскольку для функций  $\{f_n\}$  имеет место неравенство

$$\|f_n\|_\infty(\Pi) \leq \|f^{(0)}\|_\infty(\Pi_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

то справедлива оценка

$$g_n(\mu, x, t) \leq \|\Phi\|_\infty \|f^{(0)}\|_\infty(\Pi_0) \mu,$$

при  $n \in \mathbb{N}, t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^+$ . Учитывая требования на класс  $\mathcal{V}$  скоростей свободного переноса и предыдущее соотношение, получаем

$$\int_a^\infty \sup_{\xi \in \mathbb{R}} g_n(\mu, \xi, \tau) [v'(\mu)|(1+\mu)]^{1-p} d\mu \leq C \int_a^\infty \chi_n(\mu) [(1+\mu)\mu^\gamma]^{1-p} \mu d\mu,$$

$a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma > -1,$

(6.54)

где постоянная  $C$  от номера  $n \in \mathbb{N}$  не зависит.

Перейдем к оцениванию второго сомножителя в правой части соотношения (6.53):

$$\begin{aligned}
 (1 + \eta)g_n(\eta, x, \tau) &\leq \|\Phi\|_\infty(1 + \eta) \int_0^\eta f_n(\eta - \mu_1, x, \tau) f_n(\mu_1, x, \tau) d\mu_1 = \\
 &= \|\Phi\|_\infty \int_0^\eta (1 + \eta - \mu_1 + \mu_1) f_n(\eta - \mu_1, x, \tau) f_n(\mu_1, x, \tau) d\mu_1 = \\
 &= \|\Phi\|_\infty \left[ \int_0^\eta (1 + \eta - \mu_1) f_n(\eta - \mu_1, x, \tau) f_n(\mu_1, x, \tau) d\mu_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\eta \mu_1 f_n(\eta - \mu_1, x, \tau) f_n(\mu_1, x, \tau) d\mu_1 \right], \\
 &\quad n \in \mathbb{N}, \quad \eta, \tau \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Пользуясь симметричностью свертки, преобразуем правую часть этого соотношения:

$$\begin{aligned}
 (1 + \eta)g_n(\eta, x, \tau) &\leq \|\Phi\|_\infty \left[ \int_0^\eta (1 + \mu_1) f_n(\eta - \mu_1, x, \tau) f_n(\mu_1, x, \tau) d\mu_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\eta \mu_1 f_n(\eta - \mu_1, x, \tau) f_n(\mu_1, x, \tau) d\mu_1 \right].
 \end{aligned}$$

Увеличивая второе слагаемое и пользуясь равномерной оценкой (6.45) существенного максимума функций  $\{f_n\}$ , имеем

$$\begin{aligned}
 \sup_{\eta \in \mathbb{R}} (1 + \eta)g_n(\eta, x, \tau) &\leq 2\|\Phi\|_\infty \|f^{(0)}\|_\infty (\Pi_0) \int_0^\eta (1 + \mu) f_n(\mu, x, \tau) d\mu, \\
 &\quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

Усилим неравенство (6.53) за счет соотношений (6.54), (6.55):

$$\begin{aligned}
 \int_a^\infty T_{t-\tau}^v g_n(\mu, \cdot, \tau) d\mu &\leq C \left\{ \int_a^\infty \chi_n(\mu) [(1 + \mu)\mu^\gamma]^{1-p} \mu d\mu \right\}^{1/p} \times \\
 &\times \left\{ \int_{\Pi_0} (1 + \mu) f_n(\mu, x, \tau) d\mu d\xi \right\}^{1/q} (t - \tau)^{-1/q}, \quad 1 < p, q < +\infty, \\
 p^{-1} + q^{-1} &= 1, \quad \gamma > -1, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t - \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

В этом неравенстве постоянная  $C$  от номера  $n \in \mathbb{N}$  не зависит. При получении выражения во втором сомножителе во время интегрирования выполнена замена переменных

$$\mu \mapsto \xi = x - v(\mu)(t - \tau),$$

где величины  $x, t, \tau$  считаются фиксированными параметрами, причем область интегрирования по переменной  $\xi$  расширена на все ее допустимые значения. Равномерная оценка (6.48) из леммы 6.11 в сочетании с предыдущим выражением приводит к неравенству

$$\int_a^\infty T_{t-\tau}^v g_n(\mu, \cdot, \tau) d\mu \leq C \left\{ \int_a^\infty \chi_n(\mu) [(1 + \mu)\mu^\gamma]^{1-p} \mu d\mu \right\}^{1/p} (t - \tau)^{-1/q},$$

при  $a > 0, n \in \mathbb{N}, t - \tau > 0, x \in \mathbb{R}$ ; постоянная  $C$  не зависит от номера  $n \in \mathbb{N}$ . Выберем величину  $p > 1$  достаточно большой, при которой сходится интеграл

$$\int_a^\infty [(1 + \mu)\mu^\gamma]^{1-p} \mu d\mu, \quad a > 0.$$

Тем самым обеспечивается равномерная относительно номера  $n \in \mathbb{N}$  оценка

$$\int_a^\infty T_{t-\tau}^v g_n(\mu, \cdot, \tau) d\mu \leq \text{const}(t - \tau)^{-1/q}, \tag{6.56}$$

$$a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t - \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где величина  $q > 1$ .

Учитывая оценки (6.45), (6.56), устанавливаем

$$\int_0^t \int_a^\infty T_{t-\tau}^v g_n(\mu, \cdot, \tau) d\mu d\tau \leq C \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.57}$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ . Интегрируя неравенство (6.52) по переменной  $\mu \in \mathbb{R}^+$  с применением (6.57) и условий на класс начальных данных  $\sum_0$ , убеждаемся в справедливости леммы. Лемма доказана. ■

### § 10. КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ (6.43)

**Теорема 6.5.** Пусть  $(f^{(0)}, v, \Phi) \in (\sum_0 \cap C(\Pi_0)) \times \mathcal{V} \times \mathcal{K}$ . Тогда последовательность  $\{f_n\}$  решений задачи (6.44) фундаментальная в пространстве  $L_1^{(T)}$  при любом  $T \in \mathbb{R}^+$ , а предел этой последовательности



в  $L_1^{(T)}$  состоит из класса эквивалентных по мере Лебега  $d\mu \otimes dx \otimes dt$  на  $\Pi$  обобщенных решений задачи Коши (6.41), (6.42).

□ Рассмотрим разность  $z = f_n - f_m$ , где  $f_n$  и  $f_m$  — решения задачи (6.44),  $m \geq n$ . Обозначим

$$z^{(0)} = (f_n - f_m)|_{t=0}, \quad \psi = f_n + f_m, \\ \|\cdot\| \stackrel{\text{def}}{=} \|\cdot\|^{(0)}.$$

Из (6.44) следует неравенство

$$\|z(\cdot, \cdot, t)\| \leq \|z^{(0)}\| + \int_0^t \|S_n(f_n) - S_m(f_m)\| d\tau, \quad t \geq 0. \quad (6.58)$$

Подчеркнем, что операторы  $S_n, S_m$  действуют на функции только по аргументу  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Поэтому в дальнейших выкладках аргументы  $x, t$  всюду, где они являются формальными параметрами, будем опускать, восстанавливая их по мере необходимости. В силу определения операторов  $S_n, S_m$  имеем

$$|S_n(f_n) - S_m(f_m)| = |\chi_n S_n(f_n) - \chi_m S_m(f_m)| \leq \\ \leq \chi_n |S_n(f_n) - S_m(f_m)| + (\chi_n - \chi_m) |S_n(f_n)|, \\ m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Интегрируя это неравенство по  $\mu \in \mathbb{R}^+$ , получаем

$$\int_0^\infty |S_n(f_n) - S_m(f_m)| d\mu \leq \int_0^\infty |S(f_n) - S(f_m)| d\mu + \\ + \int_0^\infty (\chi_m - \chi_n) |S_m(f_m)| d\mu, \quad (6.59) \\ m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Для суммируемых на множестве  $\{\mu\} \in \mathbb{R}^+$  функций  $u, w$  справедливо неравенство

$$\int_0^\infty |S(u) - S(w)| d\mu \leq \frac{3}{2} \|\Phi\|_\infty \int_0^\infty |u + w| d\mu \int_0^\infty |u - w| d\mu. \quad (6.60)$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty |S(f_n) - S(f_m)| d\mu \leq \frac{3}{2} \|\Phi\|_\infty \int_0^\infty \psi d\mu \int_0^\infty |z| d\mu, \quad t \geq 0.$$

Учитывая здесь равномерную ограниченность интегралов

$$\int_0^{\infty} f_n(\mu, x, \tau) d\mu$$

относительно изменения  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$ , что установлено в лемме 6.12, получаем

$$\int_0^{\infty} |S(f_n) - S(f_m)| d\mu \leq C \int_0^{\infty} |z| d\mu, \quad t \in [0, T],$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $m, n, x, t$ . Интегрируя это соотношение по  $x$  на  $\mathbb{R}$ , имеем

$$\int_{\Pi_0} |S(f_n) - S(f_m)| d\mu \otimes dx \leq \text{const} \|z\|, \quad t \in [0, T]. \quad (6.61)$$

Оценивая последнее слагаемое в правой части (6.59), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (\chi_m - \chi_n) |S(f_m)| d\mu &\leq \int_n^{\infty} |S(f_m)| d\mu \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int \int_{\mu + \mu_1 \geq n} \Phi(\mu_1, \mu) |f_m(\mu)| |f_m(\mu_1)| d\mu d\mu_1 + \\ &+ \int_n^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(\mu_1, \mu) |f_m(\mu)| |f_m(\mu_1)| d\mu d\mu_1, \\ m &\geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Усилим это неравенство, увеличивая область интегрирования в слагаемых его правой части:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (\chi_m - \chi_n) |S(f_m)| d\mu &\leq 2 \int_{n/2}^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(\mu_1, \mu) |f_m(\mu)| |f_m(\mu_1)| d\mu d\mu_1 \leq \\ &\leq 2 \|\Phi\|_{\infty} \int_0^{\infty} |f_m(\mu)| d\mu \int_{n/2}^{\infty} |f_m(\mu_1)| d\mu_1, \\ m &\geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} (\chi_m - \chi_n) |S(f_m)| d\mu \leq 2 \|\Phi\|_{\infty} \int_0^{\infty} f_m(\mu) d\mu \int_{n/2}^{\infty} f_m(\mu_1) d\mu_1,$$

$$m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Дальнейшее усиление этого неравенства произведем за счет равномерной оценки интегралов из леммы 6.12. При  $t \in [0, T]$  имеем

$$\int_0^{\infty} (\chi_m - \chi_n) |S(f_m)| d\mu \leq C \int_{n/2}^{\infty} f_m(\mu_1) d\mu_1,$$

$$m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T],$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $m \geq n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , следовательно,

$$\|(\chi_m - \chi_n) S(f_m)|_t\| \leq C \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{n/2}^{\infty} f_m(\mu, x, t) d\mu, \quad (6.62)$$

$$m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T],$$

(постоянная  $C$  от номеров не зависит). Интегрируя неравенство (6.59) по аргументу  $x \in \mathbb{R}$  с учетом соотношений (6.61), (6.62), получаем

$$\|S(f_n)|_t - S(f_m)|_t\| \leq C \left[ \|z(\cdot, \cdot, t)\| + \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{n/2}^{\infty} f_m(\mu, x, t) d\mu \right], \quad (6.63)$$

где  $m \geq n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [0, T]$ , а постоянная  $C$  от номеров не зависит. Последнее слагаемое в правой части (6.63) оценим, воспользовавшись леммой 6.11:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{n/2}^{\infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) f_m(\mu, x, t) d\mu \leq \int_{\Pi_0} (1 + \mu) f_m(\mu, x, t) d\mu \otimes dx \leq$$

$$\leq \int_{\Pi_0} (1 + \mu) f^{(0)}(\mu, x, t) d\mu \otimes dx,$$

$$m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T].$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{n/2}^{\infty} f_m(\mu, x, t) d\mu \leq C \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1}, \quad (6.64)$$

$$m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T],$$

где постоянная  $C$  от номеров не зависит. Сочетая (6.58), (6.63), (6.64), получаем

$$\|z(\cdot, \cdot, t)\| \leq \|z^{(0)}\| + C \left[ \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1} T + \int_0^t \|z(\cdot, \cdot, \tau)\| d\tau \right], \quad (6.65)$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T]$$

(постоянная  $C$  от номеров не зависит). Применением леммы Гронуолла [172] на отрезке  $t \in [0, T]$  обеспечиваем оценку

$$\sup_{[0, T]} \|z(\cdot, \cdot, t)\| \leq \left( \|z^{(0)}\| + \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1} T \right) \exp(CT), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку  $\|z^{(0)}\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  и  $T > 0$  можно указать  $N(\varepsilon)$  такое, что при  $m \geq n \geq N(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\sup_{[0, T]} \|z(\cdot, \cdot, t)\| < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность  $\{f_n\}$  фундаментальная в пространстве  $L_1^{(T)}$  при каждом  $T > 0$ . В силу полноты  $L_1^{(T)}$  последовательность  $\{f_n\}$  сходится в  $L_1^{(T)}$ . Таким образом, можно указать подпоследовательность  $\{f_{n_k}\}$ , которая почти везде на  $\Pi$  сходится к неотрицательной функции  $f$ , причем в силу (6.45)

$$\|f\|_{\infty}(\Pi) \leq \|f^{(0)}\|_{\infty}(\Pi_0).$$

Применив теорему Фату [94] в сочетании с леммой 6.12, получаем

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ x \in \mathbb{R}}} \int_0^{\infty} f(\mu, x, \tau) d\mu \leq C(T). \quad (6.66)$$

Из неравенства (6.64) следует оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{n/2}^{\infty} f(\mu, x, t) d\mu \leq \text{const} \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1}, \quad (6.67)$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T].$$

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости значений  $S(f_n)$  к  $S(f)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^\infty |S(f) - S_n(f_n)| d\mu \leq \int_0^\infty |S(f) - S(f_n)| d\mu + \int_0^\infty (1 - \chi_n) |S(f)| d\mu, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.68)$$

Сочетая (6.60), (6.66), равномерную оценку из леммы 6.12, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_0^\infty |S(f) - S_n(f_n)| d\mu dx \leq C \int_{\Pi_0} |f - f_n| d\mu \otimes dx, \quad (6.69)$$

$$t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{N},$$

с постоянной  $C$ , не зависящей от номера  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку

$$\int_0^\infty (1 - \chi_n) |S(f)| d\mu \leq 2 \|\Phi\|_\infty \int_0^\infty |f(\mu)| d\mu \int_{n/2}^\infty |f(\mu_1)| d\mu_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

то, учитывая (6.66), (6.67), получаем

$$\int_{\Pi_0} (1 - \chi_n) |S(f)| d\mu \otimes dx \leq C \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.70)$$

где постоянная  $C$  от номера  $n$  не зависит. Интегрируя (6.68) по  $x \in \mathbb{R}$  с учетом (6.69), (6.70), имеем

$$\|S(f_n) - S(f)\|^{(T)} \leq C \left\{ \|f_n - f\|^{(T)} + \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1} \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

(постоянная  $C$  от номеров не зависит). Значит, существует подпоследовательность  $\{f_{n_{k_j}}\} \subset \{f_{n_k}\}$ , для которой

$$S_{n_{k_j}}(f_{n_{k_j}}) \rightarrow S(f), \quad n_{k_j} \rightarrow \infty,$$

почти везде на  $\Pi$ .

Переходя к пределу  $n = n_{k_j} \rightarrow \infty$  в (6.44), получаем, что функция  $f$  почти везде на  $\Pi$  удовлетворяет уравнению (6.43). Теорема доказана. ■

**Замечание 6.9.** Класс эквивалентных решений уравнения (6.43), выделенный в доказанной теореме, содержит неотрицательную функцию  $f$ , которая при каждом  $t \in \mathbb{R}^+$  принадлежит классу  $\Sigma_0$ , что вытекает из оценок для  $f$ , полученных в процессе доказательства теоремы.

Класс корректности для задачи (6.41), (6.42) выделяется следующим утверждением.

**Теорема 6.6.** Пусть  $f$  и  $g$  — решения уравнения (6.43) в полуплоскости  $\Pi$  такие, что при каждом  $T \in \mathbb{R}^+$  ограничены величины

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ x \in \mathbb{R}}} \int_0^\infty |f| d\mu + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Pi_0} |f| d\mu \otimes dx \leq d, \quad (6.71)$$

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ x \in \mathbb{R}}} \int_0^\infty |g| d\mu + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Pi_0} |g| d\mu \otimes dx \leq d. \quad (6.72)$$

Тогда можно указать такую постоянную  $C(T, d) < \infty$ , что

$$\|f - g\|^{(T)} \leq C(T, d) \|f(\cdot, 0) - g(\cdot, 0)\|^{(0)}. \quad (6.73)$$

□ Из тождества (6.43), выполняющегося для функций  $f, g$  почти везде на  $\Pi$ , получаем

$$|f - g| \leq T_t^v |f(\cdot, 0) - g(\cdot, 0)| + \int_0^t T_{t-\tau}^v \circ |S(f) - S(g)| d\tau, \\ 0 \leq t \leq T.$$

Интегрируя это неравенство на  $\Pi_0$  с учетом (6.60), (6.72), имеем

$$\int_{\Pi_0} |f - g| d\mu \otimes dx \leq \int_{\Pi_0} |f(\cdot, 0) - g(\cdot, 0)| d\mu \otimes dx + \\ + \frac{3}{2} \|\Phi\|_\infty \int_0^t \left[ \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_0^\infty (|f| + |g|) d\mu \int_0^\infty |f - g| d\mu \right\} dx \right] d\tau, \quad t \geq 0.$$

Учитывая ограниченность величин (6.72), приходим к неравенству

$$\|f(\cdot, t) - g(\cdot, t)\|^{(0)} \leq \|f(\cdot, 0) - g(\cdot, 0)\|^{(0)} + \\ + 3d \|\Phi\|_\infty \int_0^t \|f(\cdot, \tau) - g(\cdot, \tau)\| d\tau, \\ 0 \leq t \leq T,$$

из которого в силу леммы Гронуолла [172] следует соотношение

$$\|f - g\|^{(T)} \leq C(T, d) \|f(\cdot, 0) - g(\cdot, 0)\|^{(0)}, \\ C(T, d) = \exp(3dT \|\Phi\|_\infty).$$

Теорема доказана. ■

**Следствие 6.3.** Сочетая результаты теорем 6.5 и 6.6, устанавливаем, что теорема 6.5 имеет место, если

$$(f^{(0)}, v, \Phi) \in \Sigma_0 \times \mathcal{V} \times \mathcal{K}.$$

**Замечание 6.10.** Утверждение о непустоте класса корректности, выделяемого соотношениями (6.72), доказано в теореме 6.5. Единственность построенного решения с точностью до класса эквивалентности функций, отличающихся на множестве лебеговой меры нуль на  $\Pi$ , есть прямое следствие неравенства (6.72).

**Замечание 6.11.** Гладкие аппроксимации решения уравнения (6.43) могут быть в свою очередь приближенно найдены методом разностных схем. Основной проблемой здесь является переработка чрезмерно больших массивов данных из-за малости сеточных шагов. Существенные трудности возникают при расчетах в окрестности особенностей, область расположения которых априори неизвестна. При этом приходится существенно уменьшать шаги разностной сетки в окрестности особенностей решения предельной задачи, ибо значения правой части здесь отрицательные и весьма велики по абсолютной величине. Поскольку устойчивость разностных схем для уравнения Смолуховского имеет место только на неотрицательных сеточных функциях, то в окрестности особенностей решения значения оператора столкновений приходится умножать при вычислениях на малые шаги. Подчеркнем, что область расположения особенностей решения предельной задачи априори не является известной.

## НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО

### § 1. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определим функциональные пространства, в которых будем изучать вопросы, связанные с разрешимостью задачи Коши для пространственно однородного уравнения Смолуховского, единственностью решения этой задачи, свойствами решения. Для определенности отметим, что все операции интегрирования, встречающиеся в книге, понимаются в лебеговском смысле. Вложение двух нормированных пространств  $B_1$  и  $B_2$  будем обозначать символом  $B_1 \hookrightarrow B_2$  (т. е. пространство  $B_2$  вложено в  $B_1$ ), если выполняются соотношения

$$B_1 \supset B_2 \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_2 \geq k \|\cdot\|_1,$$

где  $k$  — некоторое положительное число,  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  — соответствующие нормы на  $B_1$  и  $B_2$ .

Фиксируем произвольные числа  $0 \leq T < \infty$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$  и обозначим  $\Omega_\lambda(T)$  нормированное пространство вещественных функций  $f$ , определенных и непрерывных в полосе

$$P_T = \{(x, t) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\},$$

удовлетворяющих условию

$$\|f\|_\lambda^{(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\infty \exp(\lambda x) |f(x, t)| dx < \infty.$$

В пространстве  $\Omega_0(T)$  выделим подмножества  $\Omega_{0,k}(T)$  ( $k$  — неотрицательное целое), которые снабдим более сильной нормированной структурой

$$\|f\|_{0,k}^{(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\infty (1 + x + x^2 + \dots + x^k) |f(x, t)| dx < \infty.$$

Отметим, что определенные таким образом нормированные пространства не являются полными; для них справедливы следующие



цепочки вложений:

$$\begin{aligned} \Omega_{\lambda_1}(T) &\hookleftarrow \Omega_{\lambda_2}(T), \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2; \\ \Omega_0(T) = \Omega_{0,0}(T) &\hookleftarrow \Omega_{0,1}(T) \hookleftarrow \dots \hookleftarrow \Omega_{0,k}(T) \hookleftarrow \dots \hookleftarrow \Omega_\lambda(T), \\ &k \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Положим

$$\Omega(T) = \bigcup_{\lambda > 0} \Omega_\lambda(T)$$

и обозначим  $\Omega_\lambda^+(T)$ ,  $\Omega_{0,k}^+(T)$ ,  $\Omega^+(T)$  — конусы неотрицательных функций в  $\Omega_\lambda(T)$ ,  $\Omega_{0,k}(T)$ ,  $\Omega(T)$  соответственно.

Имеет место включение

$$\Omega(T) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega_{0,k}(T).$$

В дальнейшем нами будет использоваться естественная метрическая структура на  $\Omega_\lambda(T)$ ,  $\Omega_{0,k}(T)$ , в которой эти пространства являются полными. Метрики, описанные ниже, порождают на рассматриваемых классах функций более сильную топологию, чем соответствующие нормы.

Введем на множестве  $C(T)$  всех непрерывных функций в полосе  $\Pi_T$  счетное семейство разделяющих полуномр  $\{p_i^{(T)}(f)\}_{i=1}^{\infty}$ , определенных так, что

$$\forall f \in C(T): p_i^{(T)}(f) = \max_{\substack{0 \leq x \leq i, \\ 0 \leq t \leq T}} |f(x, t)|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Топология равномерной сходимости на компактах, лежащих в полосе  $\Pi_T$ , порождаемая этим семейством, метризуема при помощи следующей метрики (см. [144]):

$$d^{(T)}(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} p_i^{(T)}(f - g) (1 + p_i^{(T)}(f - g))^{-1}, \quad f, g \in C(T).$$

Поскольку  $\Omega_{0,k}(T)$ ,  $\Omega_\lambda(T)$ ,  $\Omega(T)$  являются подмножествами в  $C(T)$ , то возникают соответствующие метрические структуры:

на  $\Omega_{0,k}(T)$  — метрика

$$\rho_{0,k}^{(T)} = d^{(T)}(f, g) + \|f - g\|_{0,k}^{(T)}, \quad k \geq 0;$$

на  $\Omega_\lambda(T)$  — метрика

$$\rho_\lambda^{(T)}(f, g) = d^{(T)}(f, g) + \|f - g\|_\lambda^{(T)}, \quad \lambda \geq 0;$$

на  $\Omega(T)$  индуцируется метрическая структура пространства непрерывных функций  $C(T)$ .

Отметим, что метрические пространства

$$(\Omega_{0,k}(T), \rho_{0,k}^{(T)}), \quad (\Omega_\lambda(T), \rho_\lambda^{(T)})$$

являются полными, а  $(\Omega(T), d^{(T)})$  таковым не является. В дальнейшем под метрическими пространствами  $\Omega_{0,k}(T)$ ,  $\Omega_\lambda(T)$  будем понимать соответствующие пары  $(\Omega_{0,k}(T), \rho_{0,k}^{(T)})$ ,  $(\Omega_\lambda(T), \rho_\lambda^{(T)})$ , а под нормированными пространствами тех же символов — следующие пары:

$$(\Omega_{0,k}(T), \|\cdot\|_{0,k}^{(T)}), \\ (\Omega_\lambda(T), \|\cdot\|_\lambda^{(T)}).$$

Определим классы ядер  $\Phi$ , которые рассматриваются в этой главе. Обозначим  $\mathcal{X}_0$  нормированное пространство вещественных функций, определенных и непрерывных на множестве

$$\mathbb{R}_2^+ = \{(x, y) : 0 \leq x, y < \infty\}$$

таких, что выполняются соотношения

$$\|\Phi\|_{\mathcal{X}_0} = \sup_{\mathbb{R}_2^+} |\Phi(x, y)| < \infty; \\ \Phi(x, y) = \Phi(y, x).$$

В пространстве  $\mathcal{X}_0$  выделим подмножество неотрицательных функций  $\Phi \geq 0$ , которое обозначим  $\mathcal{X}_0^+$ . Следует подчеркнуть, что все основные результаты этой главы связаны с ядрами из класса  $\mathcal{X}_0^+$ , поскольку условия симметричности, неотрицательности и ограниченности ядра  $\Phi$  позволяют строить нелокальные решения задачи Коши для уравнения коагуляции, что не имеет места для произвольных ядер  $\Phi \in \mathcal{X}_0$ .

## § 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ЯДЕР. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

**Определение 7.1.** В этой главе под решением задачи Коши (1.1<sub>0</sub>), (1.8), (1.2<sub>0</sub>) в полосе  $\Pi(T)$  понимается функция  $f \in \Omega_0(T)$ , непрерывно дифференцируемая по  $t$  при  $0 \leq t \leq T$ , обращающая уравнение (1.1<sub>0</sub>), (1.8) в тождество на  $\Pi(T)$  и совпадающая с  $f_0$  при  $t = 0$ .

Естественно, что, главным образом, нас будут интересовать неотрицательные решения уравнения коагуляции, поскольку именно они имеют физический смысл.

**Теорема 7.1 (основная 7-й главы).** Предположим, что ядро  $\Phi$  принадлежит классу  $\mathcal{K}_0^+$ , а начальная функция  $f_0$  принадлежит одному из следующих классов:

- а)  $f_0 \in \Omega_{0,k}^+(0)$ ,  $k \geq 0$ ;
- б)  $f_0 \in \Omega^+(0)$ .

Тогда, соответственно, задача Коши (1.1<sub>0</sub>), (1.8), (1.2<sub>0</sub>) в полосе  $\Pi(T)$  имеет:

- а) решение, принадлежащее  $\Omega_{0,k}^+(T)$ , единственное в  $\Omega_0(T)$ ;
- б) решение, принадлежащее  $\Omega^+(T)$ , единственное в  $\Omega_0(T)$ .

Указанное решение непрерывно зависит от входных данных задачи, т. е. от пары  $(f_0, \Phi)$  при отображении из топологического произведения  $\Omega_0^+(0) \times \mathcal{K}_0^+$  в  $\Omega_0^+(T)$ , переводящего каждую точку

$$(f_0, \Phi) \in \Omega_0^+(0) \times \mathcal{K}_0^+$$

в решение задачи Коши для уравнения коагуляции в полосе  $\Pi(T)$ .

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем ряд предварительных построений и утверждений. Фиксируем ядро  $\Phi \in \mathcal{K}_0$  и рассмотрим билинейное отображение

$$[\cdot, \cdot]_{\Phi}: \Omega_0(0) \times \Omega_0(0) \rightarrow \Omega_0(0),$$

которое определим для функций  $f, g \in \Omega_0(0)$  соотношением

$$[f, g]_{\Phi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^x \Phi(x-y, y) f(x-y) g(y) dy - f(x) \int_0^{\infty} \Phi(x, y) g(y) dy - g(x) \int_0^{\infty} \Phi(x, y) f(y) dy \right\}, \quad (7.1)$$

позволяющим записать задачу Коши (1.1<sub>0</sub>), (1.8), (1.2<sub>0</sub>) в более компактном виде

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = [f, f]_{\Phi}, & (x, t) \in \Pi_T, \\ f(x, 0) = f_0(x). \end{cases} \quad (7.2)$$

Отметим ряд важных свойств введенного отображения  $[\cdot, \cdot]_{\Phi}$  (билинейной формы). Имеет место симметричность формы  $[\cdot, \cdot]_{\Phi}$  по аргументам, вытекающая из симметричности ядра  $\Phi$ :

$$[f, g]_{\Phi} = [g, f]_{\Phi}.$$

Легко можно убедиться, что классы  $\Omega_{0,k}(0)$ ,  $\Omega_\lambda(0)$ ,  $\Omega(0)$  инвариантны относительно отображения  $[\cdot, \cdot]_\Phi$ :

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_\Phi: \Omega_{0,k}(0) \times \Omega_{0,k}(0) &\rightarrow \Omega_{0,k}(0), \quad k \geq 0, \\ [\cdot, \cdot]_\Phi: \Omega_\lambda(0) \times \Omega_\lambda(0) &\rightarrow \Omega_\lambda(0), \quad \lambda \geq 0, \\ [\cdot, \cdot]_\Phi: \Omega(0) \times \Omega(0) &\rightarrow \Omega(0). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Непосредственным интегрированием соотношения (7.1) по  $x$  с весами  $x^k$  ( $k \geq 0$ ),  $\exp(\lambda x)$  ( $\lambda \geq 0$ ) получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty x^k [f, g]_\Phi(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x, y) \{ (x+y)^k - x^k - y^k \} f(x)g(y) dx dy, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$f, g \in \Omega_{0,k}(0);$$

$$\int_0^\infty \exp(\lambda x) [f, g]_\Phi(x) dx = \quad (7.5)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x, y) \{ \exp(\lambda(x+y)) - \exp(\lambda x) - \exp(\lambda y) \} f(x)g(y) dx dy,$$

$$f, g \in \Omega_\lambda(0), \quad \lambda \geq 0.$$

Следует особо выделить два важных соотношения, получающихся из (7.4) при  $k = 0$  и  $k = 1$  и имеющих физическое содержание:

$$\int_0^\infty [f, f]_\Phi dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x, y) f(x)f(y) dx dy \leq 0, \quad (7.6)$$

$$\Phi \in \mathcal{K}_0^+, \quad f \in \Omega_0^+(0);$$

$$\int_0^\infty x [f, f]_\Phi dx = 0, \quad f \in \Omega_{0,1}(0). \quad (7.7)$$

Первое из указанных соотношений означает убывание со временем плотности числа частиц в коагулирующей системе, а второе — сохранение с течением времени общей массы частиц в единице объема системы. В этом можно убедиться формальным интегрированием по  $x$  с соответствующими весами обеих частей уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8).

Получим необходимые для дальнейших построений оценки билинейной формы  $[f, g]_\Phi$  в различных нормах. Положим  $c = \|\Phi\|_{\mathcal{X}_0}$ .

Очевидно, что

$$| [f, g]_{\Phi}(x) | \leq \frac{c}{2} \left\{ \int_0^x |f(x-y)| |g(y)| dy + \right. \\ \left. \frac{c}{2} \left\{ \int_0^x |f(x-y) + f(x)| \int_0^{\infty} |g(y)| dy + |g(x)| \int_0^{\infty} |f(y)| dy \right\} \right\}. \quad (7.8)$$

Следовательно, на каждом отрезке  $[0, a]$ ,  $0 \leq a < \infty$ , имеет место неравенство

$$\max_{0 \leq x \leq a} | [f, g]_{\Phi} | \leq \\ \leq \frac{c}{2} \left\{ \min \left( \max_{0 \leq x \leq a} |f(x)| \int_0^{\infty} |g(y)| dy, \max_{0 \leq x \leq a} |g(x)| \int_0^{\infty} |f(y)| dy \right) + \right. \\ \left. + \max_{0 \leq x \leq a} |f(x)| \int_0^{\infty} |g(y)| dy + \max_{0 \leq x \leq a} |g(x)| \int_0^{\infty} |f(y)| dy \right\}.$$

Поскольку выполнено соотношение  $\min(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b)$ , то окончательно получаем:

$$\max_{0 \leq x \leq a} | [f, g]_{\Phi} | \leq \frac{3}{4} c \left\{ \max_{0 \leq x \leq a} |f(x)| \int_0^{\infty} |g(y)| dy + \max_{0 \leq x \leq a} |g(x)| \int_0^{\infty} |f(y)| dy \right\}.$$

В дальнейшем нами будут использоваться усиленные варианты этой оценки в случае, когда  $f, g \in \Omega_{0,k}(0)$  и  $f, g \in \Omega_{\lambda}(0)$ :

$$\max_{0 \leq x \leq a} | [f, g]_{\Phi} | \leq \frac{3}{4} c \left\{ \max_{0 \leq x \leq a} |f(x)| \|g\|_{0,k}^{(0)} + \max_{0 \leq x \leq a} |g(x)| \|f\|_{0,k}^{(0)} \right\}, \quad (7.9) \\ k = 0, 1, \dots,$$

$$\max_{0 \leq x \leq a} | [f, g]_{\Phi} | \leq \frac{3}{4} c \left\{ \max_{0 \leq x \leq a} |f(x)| \|g\|_{\lambda}^{(0)} + \max_{0 \leq x \leq a} |g(x)| \|f\|_{\lambda}^{(0)} \right\}, \quad (7.10) \\ \lambda \geq 0.$$

Перейдем к получению оценок значений формы  $[f, g]_{\Phi}$  в нормах  $\|\cdot\|_{0,k}^{(0)}$  и  $\|\cdot\|_{\lambda}^{(0)}$ . Предполагая, что  $f, g \in \Omega_{0,k}(0)$ , проинтегрируем

неравенство (7.8) по  $x$  на  $[0, \infty)$  с весом  $1 + x + x^2 + \dots + x^k$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} (1 + x + x^2 + \dots + x^k) |[f, g]_{\Phi}| dx \leq \\ & \leq \frac{c}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (1 + (x + y) + \dots + (x + y)^k) |f(x)| |g(y)| dx dy + \right. \\ & \quad + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (1 + x + x^2 + \dots + x^k) |f(x)| |g(y)| dx dy + \\ & \quad \left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (1 + x + x^2 + \dots + x^k) |g(x)| |f(y)| dx dy \right\}. \end{aligned}$$

Усиливая это неравенство, получаем необходимую оценку

$$\| [f, g]_{\Phi} \|_{0,k}^{(0)} \leq A(c, k) \| f \|_{0,k}^{(0)} \| g \|_{0,k}^{(0)}, \quad k \geq 0, \quad (7.11)$$

где  $A(c, k)$  — неотрицательная константа, зависящая только от чисел  $c$  и  $k$ . Совершенно аналогичными рассуждениями устанавливаем, что

$$\| [f, g]_{\Phi} \|_{\lambda}^{(0)} \leq \frac{3}{2} c \| f \|_{\lambda}^{(0)} \| g \|_{\lambda}^{(0)}, \quad f, g \in \Omega_{\lambda}(0), \quad \lambda \geq 0. \quad (7.12)$$

Отметим, что линейность формы  $[\cdot, \cdot]_{\Phi}$  по каждому из аргументов в сочетании с соотношениями (7.9) и (7.11), (7.10) и (7.12) означает непрерывность отображений (7.3) в соответствующих метрических пространствах.

### § 3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОАГУЛЯЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЯДРОМ В КЛАССЕ $\Omega_0(T)$ . НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ ВХОДНЫХ ДАННЫХ ЗАДАЧИ

В этом разделе предполагается наличие решения задачи Коши (7.2) в классе  $\Omega_0(T)$  при входных данных задачи  $(f_0, \Phi) \in \Omega(0) \times \mathcal{K}_0$ . Сначала докажем единственность этого решения в классе  $\Omega_0(T)$ .

**Лемма 7.1.** Пусть функция  $f \in \Omega_0(T)$  является решением задачи Коши (7.2) с ядром  $\Phi \in \mathcal{K}_0$  и начальной функцией  $f_0 \in \Omega_0(0)$ . Тогда это решение единственное в классе  $\Omega_0(T)$ .

□ Будем доказывать исходя от противного утверждению леммы, т. е. предположим наличие в классе  $\Omega_0(T)$ , по крайней мере, двух

решений задачи Коши (7.2), которые мы обозначим  $f$  и  $g$ ; тогда выполняются тождества

$$f(x, t) = f_0(x) + \int_0^t [f, f]_{\Phi} ds, \quad (x, t) \in \Pi_T;$$

$$g(x, t) = f_0(x) + \int_0^t [g, g]_{\Phi} ds, \quad (x, t) \in \Pi_T.$$

Вычитая из первого тождества второе, приходим к следующему соотношению:

$$|f(x, t) - g(x, t)| \leq \int_0^t |[f - g, f + g]_{\Phi}| ds, \quad (x, t) \in \Pi_T.$$

Интегрируя полученное неравенство по  $x$  на  $[0, \infty)$ , воспользовавшись теоремой Фубини [94] и оценкой (7.11) при  $k = 0$ , получаем соотношение:

$$\|f - g\|_0^{(0)}(t) \leq K \int_0^t \|f - g\|_0^{(0)}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $K$  — неотрицательная константа, зависящая только от  $\|\Phi\|_{\mathcal{X}_0}$ ,  $\|f\|_0^{(T)}$ ,  $\|g\|_0^{(T)}$ . Таким образом, при достаточно малом  $\tau > 0$  ( $K\tau < 1$ ) справедливо неравенство

$$\|f - g\|_0^{(\tau)} \leq K\tau \|f - g\|_0^{(\tau)},$$

из которого в силу непрерывности функций  $f$  и  $g$  следует их совпадение на полосе  $\Pi_T$ . Повторяя эти рассуждения на интервалах времени  $[\tau, 2\tau]$ ,  $[2\tau, 3\tau]$  и т. д., заключаем, что  $f = g$  на  $\Pi_T$ . Лемма доказана.  $\blacksquare$

Перейдем теперь к вопросу устойчивости решения задачи Коши (7.2) относительно возмущения входных данных задачи, т. е. начальной функции  $f_0 \in \Omega_0(0)$  и ядра  $\Phi \in \mathcal{K}_0$ . Этот вопрос со значительно большей полнотой будет разобран в следующей главе для неограниченных ядер, удовлетворяющих условиям (А).

**Лемма 7.2.** Пусть  $f$  и  $g$  — решения задачи Коши (7.2), принадлежащие классу  $\Omega_0(T)$ , которые соответствуют входным данным задачи  $(f_0, \Phi)$  и  $(g_0, \bar{\Phi})$  из пространства  $\Omega_0(0) \times \mathcal{K}_0$ , причем выполняются неравенства

$$\max\{\|f\|_0^{(T)}, \|g\|_0^{(T)}\} \leq M,$$

$$\max\{\|\Phi\|_{\mathcal{X}_0}, \|\bar{\Phi}\|_{\mathcal{X}_0}\} \leq C,$$

где  $M, C$  — положительные числа. Тогда можно указать такое число  $\alpha > 0$ , зависящее от  $M, T, C$ , что справедливо следующее неравенство:

$$\|f - g\|_0^{(T)} \leq \alpha (\|f_0 - g_0\|_0^{(0)} + \|\Phi - \bar{\Phi}\|_{\mathcal{X}_0}).$$

□ Рассуждая аналогично доказательству предыдущей леммы, получаем тождество

$$f(x, t) - g(x, t) = f_0(x) - g_0(x) + \int_0^t \{ [f - g, f + g]_{\Phi} + [g, g]_{\Phi - \bar{\Phi}} \} ds,$$

из которого, с учетом сделанных оценок, следует неравенство

$$\begin{aligned} \|f - g\|_0^{(0)}(t) &\leq \|f_0 - g_0\|_0^{(0)} + K \int_0^t \|f - g\|_0^{(0)}(s) ds + \\ &\quad + T (\|g\|_0^{(T)})^2 \|\Phi - \bar{\Phi}\|_{\mathcal{X}_0}, \\ 0 \leq t \leq T, \quad K &= K(M, C) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\|f - g\|_0^{(0)}(t) \leq \{ \|f_0 - g_0\|_0^{(0)} + T (\|g\|_0^{(T)})^2 \|\Phi - \bar{\Phi}\|_{\mathcal{X}_0} \} \exp(Kt),$$

и, следовательно,

$$\|f - g\|_0^{(T)} \leq \alpha \{ \|f_0 - g_0\|_0^{(0)} + \|\Phi - \bar{\Phi}\|_{\mathcal{X}_0} \},$$

где  $\alpha = \exp(KT)(1 + TM^2)$ . Лемма доказана. ■

#### § 4. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (7.2)

В этом разделе устанавливается важный факт, имеющий физическое содержание, что неотрицательным входным данным задачи Коши (7.2) соответствуют неотрицательные решения этой задачи. Как и ранее, это утверждение доказывается в предположении существования решения в классе  $\Omega(T)$ .

**Лемма 7.3.** Пусть функция  $f \in \Omega_0(T)$  — решение задачи Коши (7.2) с начальной функцией  $f \in \Omega_0^+(0)$  и ядром  $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$ . Тогда функция  $f$  принадлежит классу  $\Omega_0^+(T)$ .

□ Сначала докажем утверждение леммы при более сильных предположениях, а именно, дополнительно к условиям леммы потребуем выполнение следующих неравенств:

$$\begin{aligned} f_0(x) &> 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x < \infty; \\ \Phi(x, y) &> 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}_2^+. \end{aligned}$$



Отметим, что при  $x = 0$  решение уравнения коагуляции удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t} f(0, t) = -f(0, t) \int_0^{\infty} \Phi(0, y) f(y, t) dy.$$

Интегрируя это соотношение по  $t$ , получаем

$$f(0, t) = f_0(0) \exp \left( - \int_0^t \int_0^{\infty} \Phi(0, y) f(y, s) dy ds \right) > 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Покажем, что функция  $f$  нигде не обращается в нуль на полосе  $\Pi_T$ . Предположим противное: так как  $f_0(x) > 0$  и  $f(0, t) > 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , то нули функции  $f$  имеют строго положительные координаты. Выберем во множестве нулей функции  $f$  в  $\Pi_T$  точку с наименьшей координатой  $x$  (это возможно, поскольку множество нулей непрерывной функции замкнутое) и обозначим ее  $(x_0, t_0)$ . В силу нашего выбора справедливо равенство  $f(x_0, t_0) = 0$ , причем  $f(x, t_0) > 0$  при  $0 \leq x < x_0$ . Тогда из уравнения коагуляции (1.1<sub>0</sub>), (1.8) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \Phi(x_0 - y, y) f(x_0 - y, t_0) f(y, t_0) dy > 0.$$

Но в этом случае из-за гладкости функции  $f$  по  $t$  при достаточно малых  $t_0 - t > 0$  справедливо неравенство  $f(x_0, t) < 0$ , а поскольку  $f(0, t) > 0$ , то можно указать точку

$$(\bar{x}, \bar{t}) \in \Pi_T, \quad 0 < \bar{x} < x_0, \quad 0 < \bar{t} < t_0,$$

в которой  $f(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ , что противоречит способу выбора точки  $(x_0, t_0)$ . Следовательно, функция  $f$  не обращается в нуль на  $\Pi_T$  и, значит,  $f > 0$  на  $\Pi_T$ .

Теперь перейдем непосредственно к доказательству леммы. Прежде всего отметим, что для неотрицательных решений уравнения ((1.1<sub>0</sub>), (1.8) выполняется неравенство

$$\int_0^{\infty} f(x, t) dx \leq \int_0^{\infty} f_0(x) dx, \quad t \geq 0, \quad (7.13)$$

которое получается применением соотношения (7.6) к интегральной форме записи уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8) по  $t$ . В силу неотрицательности, предполагаемой у функции  $f$ , из соотношения (7.13) следует

неравенство

$$\|f\|_0^{(T)} \leq \|f_0\|_0^{(0)}. \quad (7.14)$$

Пусть входные данные  $(f_0, \Phi)$  задачи Коши (7.2) удовлетворяют условиям настоящей леммы. Сделаем такое возмущение входных данных, чтобы они стали строго положительными, например

$$f_0^{(\varepsilon)}(x) = f_0(x) + \varepsilon \exp(-x), \quad \Phi^{(\varepsilon)}(x, y) = \Phi(x, y) + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Очевидно,

$$\|f_0 - f_0^{(\varepsilon)}\|_0^{(0)} = \|\Phi - \Phi^{(\varepsilon)}\|_{x_0} = \varepsilon.$$

В силу выше сделанных рассуждений входным данным  $(f_0^{(\varepsilon)}, \Phi^{(\varepsilon)})$  задачи Коши (7.2) соответствуют положительные решения этой задачи  $f^{(\varepsilon)}$ , которые ввиду неравенства (7.14) равномерно ограничены относительно  $0 < \varepsilon \leq 1$  по норме  $\|\cdot\|_0^{(T)}$ :

$$\|f^{(\varepsilon)}\|_0^{(T)} \leq \|f_0\|_0^{(0)} + 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

причем

$$\|\Phi^{(\varepsilon)}\|_{x_0} \leq \|\Phi\|_{x_0} + 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$  и воспользовавшись результатом леммы 7.2, условия которой здесь выполнены, получаем

$$\|f - f^{(\varepsilon)}\|_0^{(T)} \leq \alpha(\|f_0 - f_0^{(\varepsilon)}\|_0^{(0)} + \|\Phi - \Phi^{(\varepsilon)}\|_{x_0}) = 2\alpha\varepsilon \rightarrow 0,$$

где число  $\alpha$  зависит только от  $\|f\|_0^{(T)}$ ,  $\|\Phi\|_{x_0}$ , функция  $f$  является решением задачи Коши (7.2) с входными данными  $(f_0, \Phi)$ . Поскольку  $f^{(\varepsilon)} > 0$  и функция  $f$  непрерывная, то указанная сходимости семейства решений  $f^{(\varepsilon)}$  к функции  $f$  обеспечивает ее неотрицательность на полосе  $\Pi_T$ . Лемма доказана. ■

## § 5. ПОСТРОЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОАГУЛЯЦИИ

Кратко опишем применяемый метод построения локального решения (в достаточно малой окрестности точки  $t = 0$ ) для уравнения (1.1<sub>0</sub>) в случае оператора столкновений Смолуховского (1.8) с ограниченным ядром  $\Phi$ . Отметим сразу, что применяемая конструкция аналогична методам, применявшимся еще Коши и Ковалевской в аналитической теории дифференциальных уравнений [101–104]. Локальное решение в окрестности точки  $t = 0$  строится в виде формального тейлоровского ряда по степеням  $t$ , далее получают оценки коэффициентов ряда в различных нормах, что позволяет установить положительную оценку снизу для радиуса сходимости ряда, т. е. его

сходимость. Затем показываем, что построенная функция решает в малой окрестности точки  $t = 0$  задачу Коши для уравнения коагуляции.

**Лемма 7.4.** Пусть ядро  $\Phi \in \mathcal{K}_0$ , а начальная функция  $f_0$  принадлежит одному из следующих классов:

- а)  $f_0 \in \Omega_{0,k}(0)$ ,  $k \geq 0$ ;
- б)  $f_0 \in \Omega_\lambda(0)$ ,  $\lambda \geq 0$ .

Тогда можно указать такое положительное число  $m$ , что на каждой полосе  $\Pi_\tau$ ,  $0 < \tau < 1/m$ , существует решение задачи Коши для уравнения коагуляции, которое в случае (а) принадлежит классу  $\Omega_{0,k}(\tau)$ , а в случае (б) принадлежит классу  $\Omega_\lambda(\tau)$ .

В обоих случаях это решение аналитическое по  $t$  в интервале  $0 \leq t \leq \tau$  при каждом фиксированном  $x \in [0, \infty)$ .

□ Будем искать решение задачи Коши (7.2) в окрестности точки  $t = 0$  в виде формального ряда по степени  $t$ :

$$f(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) t^i. \quad (7.15)$$

Формальной подстановкой этого ряда в соотношение (7.2) получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов  $a_i$ ,  $i \geq 0$ :

$$\begin{cases} a_0(x) = f_0(x), \\ a_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i+j=n} [a_i, a_j]_\Phi, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Воспользовавшись свойствами (7.3) билинейного отображения  $[\cdot, \cdot]_\Phi$ , индукцией по номеру  $n \geq 0$  получаем, что

$$a_n \in \Omega_{0,k}(0),$$

если начальная функция  $f_0 \in \Omega_{0,k}(0)$ , и  $a_n \in \Omega_\lambda(0)$ , если  $f_0 \in \Omega_\lambda(0)$ . Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_n &= \|a_n\|_{0,k}^{(0)}, & \text{если } a_0 \in \Omega_{0,k}(0), \quad n \geq 0, \quad k \geq 0; \\ A_n(\lambda) &= \|a_n\|_\lambda^{(0)}, & \text{если } a_0 \in \Omega_\lambda(0), \quad n \geq 0, \quad \lambda \geq 0; \\ B_n(a) &= \max_{0 \leq x \leq a} |a_n(x)|, & 0 < a < \infty, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Из соотношений (7.9)–(7.16) получаются следующие неравенства для чисел  $A_n$  и  $B_n$ :

– в случае (а)

$$\begin{cases} A_{n+1} \leq \frac{A(c, k)}{n+1} \sum_{i+j=n} A_i A_j, \\ B_{n+1}(a) \leq \frac{A(c, k)}{n+1} \sum_{i+j=n} A_i B_j(a), \quad n \geq 0; \end{cases} \quad (7.17)$$

– в случае (б)

$$\begin{cases} A_{n+1}(\lambda) \leq \frac{A(c, k)}{n+1} \sum_{i+j=n} A_i(\lambda) A_j(\lambda), \\ B_{n+1}(a) \leq \frac{A(c, k)}{n+1} \sum_{i+j=n} A_i(\lambda) B_j(a), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (7.18)$$

где  $A(c, k)$ ,  $B(c)$  — неотрицательные константы, зависящие только от величин, указанных у них в качестве аргументов. Проводя индукцию по номеру  $n \geq 0$ , легко можно убедиться в справедливости следующих оценок, вытекающих из неравенств (7.17) и (7.18):

– в случае (а)

$$\begin{cases} A_n \leq A_0 m^n, \quad n \geq 0, \quad m = A(c, k) A_0, \\ B_n(a) \leq B_0(a) m^n; \end{cases} \quad (7.19)$$

– в случае (б)

$$\begin{cases} A_n(\lambda) \leq A_0(\lambda) m^n, \quad n \geq 0, \quad m = A(c, k) A_0(\lambda), \\ B_n(a) \leq B_0(a) m^n. \end{cases} \quad (7.20)$$

Выберем произвольное число  $\tau$  в интервале  $0 < \tau < 1/m$  и отметим, что частичные суммы ряда (7.15) принадлежат пространству  $\Omega_{0,k}(\tau)$ , когда  $f_0 \in \Omega_{0,k}(0)$ , и принадлежат пространству  $\Omega_\lambda(\tau)$ , если  $f_0 \in \Omega_\lambda(0)$ . В силу оценок (7.19), (7.20) и полноты метрических пространств  $\Omega_{0,k}(\tau)$ ,  $\Omega_\lambda(\tau)$  последовательность частичных сумм ряда (7.15) сходится по метрике  $\rho_{0,k}^{(\tau)}$  к некоторой функции  $f \in \Omega_{0,k}(\tau)$  в случае а), а в случае б) сходится по метрике  $\rho_\lambda^{(\tau)}$  к функции  $f \in \Omega_\lambda(\tau)$ . Покажем, что построенная функция  $f$  является решением уравнения коагуляции (1.1<sub>0</sub>), (1.8) в полосе  $\Pi_\tau$ . По построению функция  $f$  принадлежит пространству  $\Omega_0(\tau)$  и является гладкой по  $t$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ . В силу свойств непрерывности билинейной формы

$[\cdot, *]_{\Phi}$ , установленных в § 2, при подстановке ряда (7.15) в правую часть уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8) с учетом (7.16) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i,j \geq 0} [a_i, a_j]_{\Phi} t^{i+j} = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \sum_{s+k=i} [a_k, a_s]_{\Phi} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i t^{i-1} a_i \equiv \frac{\partial f}{\partial t}, \\ &(x, t) \in \Pi_{\tau}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $f$  удовлетворяет уравнению (1.1<sub>0</sub>), (1.8) и поскольку  $f|_{t=0} = f_0$ , то  $f$  является решением задачи Коши (7.2) в полосе  $\Pi_{\tau}$ . Лемма доказана. ■

Отметим, что в процессе доказательства этой леммы была установлена зависимость радиуса сходимости ряда (7.15) от нормы начальной функции, рассмотренной в соответствующем нормированном пространстве

$$\tau \geq 1/m = \frac{1}{A \|f_0\|},$$

где  $A$  — константа, определяемая  $\|\Phi\|_{X_0}$  в случае (б), и дополнительно номером  $k$ , если начальная функция удовлетворяет условию (а); вид нормы здесь не конкретизируется. Полученная зависимость в дальнейшем будет существенно использована для построения продолжения неотрицательного решения задачи Коши (7.2) на все положительные моменты времени  $t$ .

Подчеркнем также, что лемма 7.1 обеспечивает единственность построенного решения в классе  $\Omega_0(\tau)$ , а из леммы 7.3 следует неотрицательность этого решения при условии, что неотрицательны функции  $f_0$  и  $\Phi$ .

## § 6. РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ НОРМ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1

Оценка радиуса сходимости ряда (7.15), полученная в предыдущем разделе, указывает на то, что при наличии равномерной оценки нормы решения уравнения коагуляции вплоть до правой границы интервала  $[0, 1/m)$  можно осуществить продолжение решения на больший интервал в направлении возрастания времени  $t$ . Это, оказывается, можно сделать для неотрицательного решения уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8), отвечающего неотрицательным  $f_0$  и  $\Phi$ . При входных

данных, не обладающих этим свойством, задача Коши для уравнения коагуляции в целом, вообще говоря, неразрешима, на что указывает следующий пример.

**Пример 7.1.** Рассмотрим задачу Коши (7.2) со следующими входными данными:

$$f_0(x) = \exp(-x), \quad \Phi(x, y) = -1.$$

В этом случае точное решение можно получить методом преобразования Лапласа по переменной  $x$ , оно имеет следующий вид:

$$f(x, t) = \frac{1}{(1 - (1/2)t)^2} \exp\left(-\frac{x}{1 - (t/2)}\right), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Несложно убедиться в том, что в этом случае непрерывное по  $(x, t)$  продолжение этого решения на неотрицательную полуось времени  $t$  существует лишь локально при  $t < t_c = 2$ .

В следующей лемме получим необходимые равномерные оценки решения задачи Коши (7.2).

**Лемма 7.5.** Предположим, что ядро  $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$  и функция  $f(x, t)$ , определенная и непрерывная при  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq t < T$ , является решением уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8) на каждой полосе  $\Pi_\tau$ ,  $0 < \tau < T$ , причем

$$f \in \Omega_{0,k}^+(\tau)$$

при каждом указанном  $\tau$ . Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{0 < \tau < T} \|f\|_{0,k}^{(\tau)} < \infty, \quad k \geq 0.$$

□ Поскольку функция  $f$  — решение уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8), то при  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq t \leq T$  выполняется тождество

$$f(x, t) = f_0(x) + \int_0^t [f, f]_\Phi ds.$$

Интегрируя это соотношение по  $x$  с весами  $x^i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , на  $[0, \infty)$ , получаем равенство

$$\int_0^\infty x^i f(x, t) dx = \int_0^\infty x^i f_0(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x, y) \{(x+y)^i - x^i - y^i\} f(x, s) f(y, s) dx dy ds.$$

Здесь при перестановке порядка интегрирования мы воспользовались теоремой Фубини [94] и соотношениями (7.4). Из полученного соотношения в силу неотрицательности функций  $f$  и  $\Phi$  и ограниченности ядра  $\Phi$  вытекают следующие неравенства и тождество:

$$\int_0^{\infty} f(x, t) dx \leq \int_0^{\infty} f_0(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (7.21)$$

$$\int_0^{\infty} x f(x, t) dx = \int_0^{\infty} x f_0(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^i f(x, t) dx &\leq \int_0^{\infty} x^i f_0(x) dx + \\ &+ L \sum_{\substack{1 \leq l, m \leq i-1 \\ l+m=i}} \int_0^t ds \int_0^{\infty} x^l f(x, s) dx \int_0^{\infty} y^m f(y, s) dy, \end{aligned} \quad (7.23)$$

при  $0 \leq t < T$ ,  $2 \leq i \leq k$ ;  $L$  — неотрицательная константа, зависящая от номера  $i$  и  $\|\Phi\|_{\mathcal{X}_0}$ . Применением индукции по номеру  $0 \leq i \leq k$  в неравенствах (7.21)–(7.23) устанавливаем, что каждая величина

$$\sup_{0 \leq t < T} \int_0^{\infty} x^i f(x, t) dx < \infty.$$

Поскольку неотрицательность функции  $f$  обеспечивает справедливость равенства

$$\|f\|_{0,k}^{(\tau)} = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \sum_{i=0}^k \int_0^{\infty} x^i f(x, t) dx,$$

то полученные равномерные относительно  $0 \leq t < T$  оценки моментов решения

$$\int_0^{\infty} x^i f(x, t) dx, \quad i \geq 0,$$

гарантируют конечность величин

$$\sup_{0 < \tau < T} \|f\|_{0,k}^{(\tau)}, \quad k \geq 0.$$

Лемма доказана. ■

**Доказательство теоремы 7.1**

□ а) Сначала проведем рассуждение в случае, когда функция  $f$  принадлежит пространству  $\Omega_{0,k}(0)$ . На основании результатов лемм 7.1, 7.2, 7.4 можно утверждать, что в каждой полосе  $\Pi_\tau$ ,  $0 < \tau < 1/m$ , существует решение задачи Коши (7.2), принадлежащее классу  $\Omega_{0,k}^+(\tau)$ , единственное в классе  $\Omega_0(\tau)$ . В силу леммы 7.5 для указанного решения справедливо неравенство

$$\sup_{0 < \tau < \frac{1}{m}} \|f\|_{0,k}^{(\tau)} < \infty.$$

Выберем точку  $t_0 \in [0, 1/m)$  достаточно близко к правому краю этого интервала и, приняв функцию  $f(\cdot, t_0)$  за начальную, построим в окрестности точки  $t_0$  решение уравнения (1.10), (1.8) в виде ряда по степеням  $(t - t_0)$  аналогично ряду (7.15). Сходимость такого ряда гарантируется в круге

$$|t - t_0| < \frac{1}{A(c, k) \sup_{0 \leq \tau < \frac{1}{m}} \|f\|_{0,k}^{(\tau)}},$$

причем следует подчеркнуть, что радиус рассматриваемого круга не зависит от выбора точки  $t_0 \in [0, 1/m)$ . Таким образом, за счет указанного выбора точки  $t_0$  можно продолжить решение за правую границу интервала  $0 \leq t < 1/m$  и, повторяя эти рассуждения по шагам, можно продолжить решение на любой отрезок времени  $0 \leq t \leq T, T > 0$ .

б) Теперь перейдем к построению продолжения решения, когда функция  $f_0$  принадлежит пространству  $\Omega^+(0)$ . Поскольку  $f_0$  принадлежит пространству  $\Omega^+(0)$ , то можно указать число  $\lambda > 0$ , при котором  $f_0 \in \Omega_\lambda^+(0)$ . Тогда на полосе  $\Pi_\tau$ ,  $0 < \tau < 1/m$  существует единственное в классе  $\Omega_0(\tau)$  решение задачи Коши (7.2)  $f \in \Omega_\lambda^+(\tau)$  (см. леммы 7.1, 7.3, 7.4). Воспользовавшись теоремой Б. Леви [94], неравенством (7.21), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, t)\|_\lambda^{(0)} &= \int_0^\infty \exp(\lambda x) f(x, t) dx = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \lambda^k \int_0^\infty \frac{x^k}{k!} f(x, t) dx \leq \sigma_0^{(0)} + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k \int_0^\infty \frac{x^k}{k!} f(x, t) dx, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_0^{(0)} = \int_0^\infty f_0(x) dx.$$



Выберем число  $\lambda_0 > 0$  достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\|f_0\|_{\lambda_0}^{(0)} \leq 2\sigma_0^{(0)}.$$

В этом случае величина  $m$  равна  $k\sigma_0^{(0)}$ , где  $k$  — неотрицательная константа, зависящая только от  $\|\Phi\|_{\mathcal{X}_0}$ . Положим  $t_1 = 1/(2m)$ . Функция  $f(\cdot, 1/(2m))$  принадлежит пространству  $\Omega_{\lambda_0}^+(0)$  и в силу вложений, указанных в §1, функция  $f(\cdot, 1/2m)$  принадлежит пространству  $\Omega_{\lambda}^+(0)$ , где  $0 < \lambda < \lambda_0$ . Выберем число  $\lambda_1 \in (0, \lambda_0)$  настолько малым, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\left\| f\left(\cdot, \frac{1}{2m}\right) \right\|_{\lambda_1}^{(0)} \leq 2\sigma_0^{(0)}.$$

Принимая  $f(\cdot, 1/2m)$  в качестве начальной функции, построим в окрестности точки  $t_1 = 1/2m$  решение уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8) в виде ряда по степеням  $(t - t_1)$ , сходимость которого гарантируется в круге

$$|t - t_1| < \frac{1}{k\sigma_0^{(0)}},$$

и, таким образом, продолжаем решение на интервал времени  $0 \leq t < 3/(2m)$ . Повторяя эти рассуждения в точках  $t_i = i/(2m)$ ,  $i \geq 1$ , строим продолжение решения на любой отрезок времени  $0 \leq t \leq T$ ,  $T > 0$ .

Лемма 7.2 гарантирует непрерывную зависимость построенного в пунктах а) и б) решения задачи Коши (7.2) от входных данных задачи  $(f_0, \Phi)$ . Утверждение о единственности и неотрицательности решения доказано в леммах 7.1, 7.3. Теорема доказана. ■

## § 7. КЛАСС НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЯДЕР

Теория задачи Коши для уравнения коагуляции с ограниченными ядрами не содержит случаев, важных с точки зрения приложений в кинетике коагуляции дисперсных систем, поскольку в реальных процессах ядра  $\Phi$  обладают существенной неограниченностью при  $x, y \rightarrow \infty$ . Можно убедиться, что, как правило, такие ядра принадлежат следующему нормированному пространству  $\mathcal{K}$  вещественных функций, определенных и непрерывных на  $\mathbb{R}_2^+$ :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \Phi(x, y) = \Phi(y, x) \geq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_2^+; \\ 2^\circ \quad & \|\Phi\|_{\mathcal{K}} = \sup_{\mathbb{R}_2^+} \Phi(x, y)(1 + x + y)^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

Выделим в пространстве  $\mathcal{K}$  открытые шары радиуса  $c > 0$ :

$$\mathcal{K}_c = \{\Phi \in \mathcal{K} : \|\Phi\|_{\mathcal{K}} < c\},$$

которые в дальнейшем будут использоваться при изучении вопросов, связанных с устойчивостью решения задачи Коши для уравнения коагуляции. Отметим, что ядра, принадлежащие шару  $\mathcal{K}_c$ , во введении выделялись условиями (A).

Наряду с нормированной структурой на пространстве  $\mathcal{K}$  рассмотрим метрическую структуру, определяющую топологию равномерной сходимости на компактах, принадлежащих  $\mathbb{R}_2^+$ , которую введем следующей метрикой:

$$r(\Phi, \bar{\Phi}) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(\Phi - \bar{\Phi})(1 + q_i(\Phi - \bar{\Phi}))^{-1},$$

где полунормы  $q_i$  определены соотношениями

$$q_i(\Phi - \bar{\Phi}) = \sup_{0 \leq x, y \leq i} |\Phi(x, y) - \bar{\Phi}(x, y)|, \\ \Phi, \bar{\Phi} \in \mathcal{K}.$$

Метрическая топология на  $\mathcal{K}$ , легко видеть, грубее топологии, порождаемой нормой  $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ . Метрика  $r$  индуцирует на шарах  $\mathcal{K}_c$  структуру метрического пространства  $(\mathcal{K}_c, r)$ .

**§ 8. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.  
ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ  
И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ С ЯДРАМИ  $\Phi \in \mathcal{K}$**

Укажем на некоторые важные моменты, связанные с вопросом разрешимости задачи Коши для уравнения коагуляции в случае неограниченного ядра  $\Phi \in \mathcal{K}$ . Прежде всего следует подчеркнуть, что область определения билинейной формы  $[\cdot, *]_{\Phi}$  с ядром  $\Phi \in \mathcal{K}$ , вообще говоря, уже, чем область определения этой формы с ядрами из класса  $\mathcal{K}_0$ . Нетрудно убедиться, что естественной областью определения  $[\cdot, *]_{\Phi}$  при  $\Phi \in \mathcal{K}$  является множество

$$\Omega_{0,1}(0) \times \Omega_{0,1}(0).$$

В отличие от случая ограниченных ядер  $\Phi \in \mathcal{K}_0$ , когда пространства  $\Omega_{0,k}(0)$  инвариантны относительно  $[\cdot, *]_{\Phi}$ , это не имеет места, вообще говоря, если  $\Phi \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ . Действительно, предположим, что

$$\Phi(x, y) = x + y,$$

а функция  $f \in \Omega_{0,1}^+(0)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} f &\notin \Omega_{0,2}(0), \\ f(x) &> 0, \quad x \in I = \bigcup_{k=0}^{\infty} (1 + 3k, 2 + 3k), \\ f(x) &= 0, \quad x \in [0, \infty) \setminus I. \end{aligned}$$

Тогда в точках  $x$ , в которых  $f(x) > 0$ , имеет место соотношение

$$\int_0^x \Phi(x-y, y) f(x-y) f(y) dy = 0,$$

и, следовательно, выполнено неравенство

$$|[f, f]_{\Phi}(x)| \geq f(x) \left( x \int_0^{\infty} f(y) dy + \int_0^{\infty} y f(y) dy \right).$$

Поскольку правая часть этого неравенства — несуммируемая функция на  $[0, \infty)$  с весом  $x$ , то  $[f, f]_{\Phi} \notin \Omega_{0,1}(0)$ . Таким образом, при  $f \in \Omega_{0,1}(0)$ ,  $\Phi \in \mathcal{K}$ , для правой части уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8) не имеет места, вообще говоря, важное с физической точки зрения соотношение (7.22), определяющее закон сохранения массы частиц в коагулирующей системе. В случае ядер  $\Phi \in \mathcal{K}$  справедливы следующие свойства билинейного отображения  $[\cdot, \cdot]_{\Phi}$ :

$$\begin{aligned} \Phi &: \Omega_{0,k}(0) \times \Omega_{0,k}(0) \rightarrow \Omega_{0,k-1}(0), \quad k \geq 1; \\ [\cdot, \cdot]_{\Phi} &: \Omega(0) \times \Omega(0) \rightarrow \Omega(0). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Важным следствием этих свойств является то, что для формы  $[\cdot, \cdot]_{\Phi}$  выполняется соотношение (7.7) при любой функции  $f \in \Omega_{0,2}(0)$  и произвольном ядре  $\Phi \in \mathcal{K}$ ; поэтому естественно пытаться строить решение уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8) в классе  $\Omega_{0,2}(T)$ , поскольку для решений уравнения коагуляции, принадлежащих этому классу, непременно выполняется закон сохранения (7.22).

В связи с сужением области определения правой части уравнения коагуляции, возникшим из-за расширения класса рассматриваемых ядер до класса  $\mathcal{K}$ , следует дать новое определение решения задачи Коши (7.2).

**Определение 7.2.** Под решением задачи Коши (7.2) с ядром  $\Phi \in \mathcal{K}$  будем понимать функцию  $f \in \Omega_{0,1}(T)$ , непрерывно дифференцируемую по  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , обращающую уравнение (1.1<sub>0</sub>), (1.8) в тождество на полосе  $\Pi_T$  и совпадающую при  $t = 0$  с начальной функцией  $f_0$ .

Подчеркнем, что для доказательства разрешимости задачи Коши (7.2) с ядром  $\Phi \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ , т. е. с неограниченным ядром, методы, применявшиеся в работах [245–250], а также в предыдущей главе, не пригодны, так как они существенно опираются на инвариантность классов  $\Omega_{0,k}(0)$  относительно отображения  $[\cdot, *]_{\Phi}$ , что в нашем случае, как указано выше, не имеет места. В связи с этим возникают особые трудности при рассмотрении вопросов как существования, так и единственности решения, которые доказываются иными методами, основанными на аппроксимации исходной задачи с неограниченным ядром  $\Phi \in \mathcal{K}$  последовательностью задач с ограниченными ядрами  $\Phi_n \in \mathcal{K}_0^+$ , изученными в § 1–6 данной главы.

Сформулируем основную теорему настоящей главы.

**Теорема 7.2.** Пусть ядро  $\Phi$  принадлежит классу  $\mathcal{K}$ , а начальная функция  $f_0$  принадлежит одному из следующих классов:

- а)  $f_0 \in \Omega_{0,k}^+(0)$ ,  $k \geq 2$ ;
- б)  $f_0 \in \Omega^+(0)$ .

Тогда соответственно задача Коши (7.2) в полосе  $\Pi_T$  имеет

- а) по крайней мере, одно решение из класса  $\Omega_{0,k}^+(T)$ ,  $k \geq 2$ ;
- б) решение из класса  $\Omega^+(T)$ , причем это решение единственное в классе  $\Omega(T)$ .

Прежде чем доказывать эту теорему, необходимо сделать некоторые построения и доказать ряд предварительных утверждений. Отметим, что ниже мы пополним класс ядер, для которых доказана разрешимость задачи Коши (7.2), ядрами, имеющими особенности на осях координат в пространстве  $\mathbb{R}_2^+$ . Одним из таких ядер является ядро броуновской коагуляции

$$\Phi(x, y) = [(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{-1/3} + y^{-1/3})]^3, \quad x, y > 0.$$

### § 9. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЯДРОМ. ОЦЕНКИ НОРМ РЕШЕНИЙ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ЗАДАЧ

Для ядра  $\Phi$ , принадлежащего классу  $\mathcal{K}$ , построим последовательность ядер

$$\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$$

таких, что  $\Phi_n \in \mathcal{K}_0^+$  при каждом номере  $n$  ( $n \geq 1$ ) и на квадратах  $0 \leq x, y \leq n$  выполняются соотношения

$$\Phi_n(x, y) = \Phi(x, y).$$

Легко проверить, что указанными свойствами обладает, например, следующая последовательность ядер:

$$\Phi_n(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y), & 0 \leq x, y \leq n, \\ \Phi(x, n), & 0 \leq x \leq n, \quad n \leq y < \infty, \\ \Phi(n, y), & n \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq n, \\ \Phi(n, n), & n \leq x, y \leq \infty, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (7.25)$$

С последовательностью ядер  $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  связана последовательность функций  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ , являющихся решениями следующих задач Коши для уравнений коагуляции:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_n(x, t)}{\partial t} = [f_n, f_n]_{\Phi_n}, & (x, t) \in \Pi_T, \\ f_n(x, 0) = f_0(x), & n \geq 1. \end{cases} \quad (7.26)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что начальная функция  $f_0$  принадлежит одному из классов  $\Omega_{0,k}^+(0)$  ( $k \geq 0$ ),  $\Omega^+(0)$ .

Получим оценки норм решений задачи Коши (7.26).

**Лемма 7.6.** Пусть начальная функция  $f_0$  принадлежит одному из следующих классов:

- а)  $f_0 \in \Omega_{0,k}^+(0)$ ,  $k \geq 0$ ;
- б)  $f_0 \in \Omega^+(0)$ .

Тогда для построенной последовательности функций можно указать такие константы  $0 \leq M(T) < \infty$ ,  $\bar{\lambda}(T) > 0$ , что соответственно каждому из рассмотренных случаев выполняются неравенства

- а)  $\|f_n\|_{0,k}^{(T)} \leq M(T)$ ,  $n \geq 1$ ;
- б)  $\|f_n\|_{\bar{\lambda}(T)}^{(T)} \leq M(T)$ ,  $n \geq 1$ .

□ Поскольку рассматриваемые нормы связаны с моментами функций  $f_n$ , то сначала получим равномерные оценки моментов этих функций. Воспользовавшись соотношениями (1.4) для решений  $f_n$  задачи Коши (7.26), получаем, что при  $t \geq 0$  выполняются тождества

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} x^k f_n(x, t) dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} ((x+y)^k - x^k - y^k) \Phi_n(x, y) f_n(x, t) f_n(y, t) dx dy, \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$n \geq 1, \quad k \geq 0.$$

Обозначим моменты

$$\sigma_{k,n}(t) = \int_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} f_n(x, t) dx.$$

Ясно, что функции  $\sigma_{k,n}(t) \geq 0$  при  $0 \leq t \leq T$ . Из соотношений (7.27) следует справедливость следующих неравенств и тождеств:

$$\sigma_{0,n}(t) \leq \sigma_0^{(0)} = \int_0^{\infty} f_0(x) dx, \quad t \geq 0, \quad n \geq 1; \quad (7.28)$$

$$\sigma_{1,n}(t) \equiv \sigma_1^{(0)} = \int_0^{\infty} x f_0(x) dx, \quad t \geq 0, \quad n \geq 1. \quad (7.29)$$

Поскольку ядра  $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , определенные соотношениями (7.25), принадлежат некоторому шару  $\mathcal{K}_c$ ,  $c > 0$ , из пространства  $\mathcal{K}$ , то при каждом номере  $n \geq 1$  выполняется оценка

$$\Phi_n(x, y) \leq c(1 + x + y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_2^+, \quad c > 0, \quad (7.30)$$

где число  $c$  не зависит от номера  $n$ .

В силу соотношений (7.27) и неравенств (7.30) имеем

$$\frac{d}{dt} \sigma_{k,n}(t) \leq c \sum_{i=1}^{k-1} \left( (k-i+1) \sigma_{k-i+1,n}(t) + \frac{1}{2} \sigma_{k-i,n}(t) \right) \sigma_{i,n}(t)$$

при значениях  $n \geq 1$ ,  $k \geq 2$ , причем

$$\sigma_{k,n}(0) = \sigma_k^{(0)} = \int_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} f_0(x) dx.$$

Введем функции  $\sigma_k(t)$ ,  $k \geq 1$  как решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sigma_k(t) = c \sum_{i=1}^{k-1} \left( (k-i+1) \sigma_{k-i+1}(t) + \frac{1}{2} \sigma_{k-i}(t) \right) \sigma_i(t), \\ \sigma_1(t) \equiv \sigma_1^{(0)}, \\ \sigma_k(0) = \sigma_k^{(0)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Очевидно, что выполняются оценки

$$\sigma_{k,n}(t) \leq \sigma_k(t), \quad t \geq 0,$$

при  $n, k \geq 1$ . Поскольку функции  $f_n$  неотрицательные и выполняются соотношения (7.28), то

$$\|f_n\|_{0,k}^{(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=0}^k i! \sigma_{n,i}(t) \leq \sigma_0^{(0)} + \sum_{i=1}^k i! \sigma_i(T) = M(T).$$

Отметим, что в последнем неравенстве сумму по  $i$  в правой части следует отбросить при  $k = 0$ . Таким образом, в случае а) лемма доказана.

Перейдем к случаю, когда  $f_0 \in \Omega^+(0)$ . Построим производящую функцию для  $\sigma_k(t)$  в виде формального ряда

$$\sigma(\lambda, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \sigma_k(t). \tag{7.31}$$

Вопрос о сходимости ряда (7.31) свяжем с изучением области существования аналитического по  $(\lambda, t)$  в окрестности точки  $(\lambda, t) = (0, 0)$  решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \sigma(\lambda, t) = c \left( \sigma \frac{\partial}{\partial \lambda} \sigma - \sigma_1^{(0)} \sigma + \frac{1}{2} \sigma^2 \right), \\ \sigma(\lambda, 0) = \sigma^{(0)}(\lambda), \end{cases} \tag{7.32}$$

где начальная функция определяется интегралом от  $f_0$

$$\sigma^{(0)}(\lambda) = \int_0^{\infty} (\exp(\lambda x) - 1) f_0(x) dx.$$

Очевидно, что функция  $\sigma^{(0)}(\lambda)$  аналитична в круге  $|\lambda| < \lambda_0$ , так как ввиду условия б) функция  $f_0$  принадлежит классу  $\Omega_{\lambda_0}^+(0)$  при некотором  $\lambda_0 > 0$ . Непосредственно изучая задачу Коши (7.32), можно получить следующую неявную формулу для ее решения  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \exp(-c\sigma_1^{(0)}t) \sigma^{(0)} \left( \lambda + 2 \ln \left( 1 + \frac{\sigma}{2\sigma_1^{(0)}} \left( \exp(c\sigma_1^{(0)}t) - 1 \right) \right) \right) \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{1}{2\sigma_1^{(0)}} \left( 1 - \exp(-c\sigma_1^{(0)}t) \right) \times \right. \\ &\times \left. \sigma^{(0)} \left( \lambda + 2 \ln \left( 1 + \frac{\sigma}{2\sigma_1^{(0)}} \left( \exp(c\sigma_1^{(0)}t) - 1 \right) \right) \right) \right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Покажем, что для любого круга

$$U_T = \{t: |t| \leq T, T > 0\}$$

можно указать такой круг

$$\Lambda = \{\lambda: |\lambda| < \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda} > 0\},$$

что в поликруге  $\Lambda \times U_T$  существует аналитическое по  $\lambda, t$  решение неявного относительно  $\sigma$  уравнения (7.33), причем это решение является решением задачи (7.32). Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} R(\sigma, \lambda, t) &\equiv \\ &\equiv \sigma - \exp(-c\sigma_1^{(0)}t)\sigma^{(0)} \left( \lambda + 2 \ln \left( 1 + \frac{\sigma}{2\sigma_1^{(0)}} (\exp(c\sigma_1^{(0)}t) - 1) \right) \right) \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{1}{2\sigma_1^{(0)}} (1 - \exp(-c\sigma_1^{(0)}t)) \times \right. \\ &\times \left. \sigma^{(0)} \left( \lambda + 2 \ln \left( 1 + \frac{\sigma}{2\sigma_1^{(0)}} (\exp(c\sigma_1^{(0)}t) - 1) \right) \right) \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

которая определена на каждом круге  $U_T$  по переменной  $t$  при достаточно малых по абсолютной величине  $\lambda$  и  $\sigma$ . Действительно, так как функция  $\sigma^{(0)}(\lambda)$  голоморфна в окрестности точки  $\lambda = 0$ , причем  $\sigma^{(0)}(0) = 0$ , то для любого круга  $U_T$  можно указать достаточно малую окрестность точки  $(\lambda = 0, \sigma = 0)$

$$\Lambda_T \times \sum_T = \{(\lambda, \sigma): |\lambda| < \tilde{\lambda}, |\sigma| < \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda} > 0, \tilde{\sigma} > 0\}$$

такую, что функция  $R$  является аналитической в поликруге

$$\sum_T \times \Lambda_T \times U_T,$$

причем

$$R(0, 0, t) \equiv 0, \quad t \in U_T. \quad (7.34)$$

В точках  $(0, 0, t)$ ,  $t \in U_T$ , выполняется также соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} R(0, 0, t) \equiv \exp(-c\sigma_1^{(0)}t) \neq 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции [180] в окрестности каждой точки  $(0, t_0) \in \Lambda_T \times U_T$  существует единственное аналитическое решение уравнения (7.33) — функция  $\sigma^{(t_0)}(\lambda, t)$ , удовлетворяющая условию

$$\sigma^{(t_0)}(0, t_0) = 0.$$

Таким образом, возникает семейство открытых кругов  $\Lambda^{(t_0)} \times U^{(t_0)}$  с центром в точках  $(\lambda, t) = (0, t_0)$ , в каждом из которых уравнение (7.33) обладает аналитическим решением  $\sigma^{(t_0)}$ . Отметим, что



в силу соотношения (7.34) построенные функции  $\sigma^{(t_0)}$  необходимо должны удовлетворять тождествам

$$\sigma^{(t_0)}(0, t) \equiv 0, \quad t \in U^{(t_0)}, \quad t_0 \in U_T. \quad (7.35)$$

Система открытых кругов  $U^{(t_0)}$  ( $t_0 \in U_T$ ) образует покрытие замкнутого круга  $U_T$ . Выберем из указанного покрытия конечное подпокрытие  $U^{(t_1)}, U^{(t_2)}, \dots, U^{(t_n)}$ . Положим

$$\Lambda = \bigcap_{i=1}^n \Lambda^{(t_i)}.$$

Итак, в каждом поликруге  $\Lambda \times U^{(t_i)}$  существует единственное аналитическое по  $(\lambda, t)$  решение уравнения (7.33)  $\sigma^{(t_i)}$ , которое удовлетворяет соотношению (7.35). Поскольку система кругов

$$\{U^{(t_i)}\}_{i=1}^n$$

покрывает  $U_T$ , то для каждого круга  $U^{(t_i)}$  можно указать круг  $U^{(t_j)}$ ,  $i \neq j$ , такой, что

$$U^{(t_i)} \cap U^{(t_j)} \neq \emptyset.$$

Фиксируем произвольную точку

$$\bar{t} \in U^{(t_i)} \cap U^{(t_j)}.$$

В силу соотношений (7.35) выполняется равенство

$$\sigma^{(t_i)}(0, \bar{t}) = \sigma^{(t_j)}(0, \bar{t}). \quad (7.36)$$

Ввиду аналитичности функций  $\sigma^{(t_i)}$  и  $\sigma^{(t_j)}$  на

$$\Lambda \times (U^{(t_i)} \cap U^{(t_j)})$$

и локальной единственности решения уравнения (7.33) соотношение (7.36) обеспечивает совпадение функций  $\sigma^{(t_i)}$  и  $\sigma^{(t_j)}$  на указанном множестве, т. е. существует аналитическое продолжение  $\sigma^{(t_i)}$  и  $\sigma^{(t_j)}$  на область  $\Lambda \times (U^{(t_i)} \cup U^{(t_j)})$ . Воспользовавшись связностью покрытия

$$\{U^{(t_i)}\}_{i=1}^n,$$

получаем, что существует аналитическое продолжение функций  $\sigma^{(t_1)}, \sigma^{(t_2)}, \dots, \sigma^{(t_n)}$  на  $\Lambda \times U_T$ ; построенное аналитическое продолжение обозначим  $\sigma$ . Таким образом, доказано существование аналитического на  $\Lambda \times U_T$  решения уравнения (7.33), удовлетворяющего соотношению

$$\sigma(0, t) \equiv 0, \quad t \in U_T.$$

Последнее тождество обеспечивает единственность такого решения.

Подставляя (7.33) в уравнение (7.32), убеждаемся, что построенная функция  $\sigma$  является решением задачи Коши (7.32). Коэффициенты разложения функции  $\sigma$  в ряд Тейлора по степеням  $\lambda$  совпадают с коэффициентами формального ряда (7.31). Следовательно, ряд (7.31) сходится в некоторой области ( $|\lambda| \leq \bar{\lambda}$ ,  $0 \leq t \leq T$ ),  $\bar{\lambda} > 0$ , а так как функция  $\sigma$  ограничена на указанном множестве, то имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}^k \sigma_k(t) \leq M_1 < \infty$$

равномерно относительно  $0 \leq t \leq T$ . Эта оценка обеспечивает выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}^k \sigma_{k,n}(t) \leq M_1, \quad n \geq 1,$$

равномерно относительно  $0 \leq t \leq T$ . Воспользовавшись теоремой Б. Леви [94], получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}^k \sigma_{k,n}(t) = \int_0^{\infty} [\exp(\bar{\lambda}x) - 1] f_n(x, t) dx \leq M_1, \\ 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1.$$

Ввиду неравенства (7.28) имеем

$$\int_0^{\infty} \exp(\bar{\lambda}x) f_n(x, t) dx \leq M_1 + N_0 = M(T), \\ 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1,$$

и окончательно

$$\|f_n\|_{\bar{\lambda}}^{(T)} \leq M(T) < \infty, \quad n \geq 1.$$

Лемма доказана. ■

Отметим два важных неравенства, вытекающих из леммы 7.6 в случае, когда начальная функция  $f_0 \in \Omega_{0,2}^+(0)$ :

$$\int_a^{\infty} f_n(x, t) dx \leq \frac{\sigma_1^{(0)}}{a}, \quad \int_a^{\infty} x f_n(x, t) dx \leq \frac{2\sigma_2(T)}{a}, \\ 0 \leq t \leq T, \quad a > 0, \quad n \geq 1. \tag{7.37}$$

### § 10. КОМПАКТНОСТЬ СЕМЕЙСТВА АППРОКСИМАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом разделе рассматривается вопрос о компактности семейства решений  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  задачи Коши (7.26) с ограниченными ядрами  $\Phi_n$ , которые, согласно соотношениям (7.25), аппроксимируют неограниченное ядро  $\Phi \in \mathcal{K}$ .

Обозначим

$$\Pi_T(X) = \{(x, t) : 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T, X, T \geq 0\}.$$

**Лемма 7.7.** Пусть начальная функция  $f_0$  принадлежит пространству  $\Omega_{0,2}^+(0)$ . Тогда последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  решений задачи Коши (7.26) с ядрами, определенными соотношениями (7.25), компактна в пространстве непрерывных функций  $C$  на каждом прямоугольнике  $\Pi_T(X)$ , где  $X, T > 0$ .

□ Сначала покажем равномерную ограниченность последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  на прямоугольнике  $\Pi_T(X)$ , который считается фиксированным при всех последующих рассуждениях. Воспользовавшись неотрицательностью решений  $f_n$  задачи Коши (7.26), получаем неравенство

$$f_n(x, t) \leq f_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \Phi_n(x-y, y) f_n(x-y, s) f_n(y, s) dy ds \quad (7.38)$$

при  $(x, t) \in \Pi_T(X)$ ,  $n \geq 1$ . Примем обозначения:

$$L_0 = \sup_{0 \leq x \leq X} f_0(x),$$

$$L_n(t) = \sup_{0 \leq x \leq X} f_n(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, n \geq 1.$$

В этих обозначениях неравенство (7.38), усиленное за счет того, что ядра  $\Phi_n$  удовлетворяют соотношению (7.30) при всех номерах  $n \geq 1$ , приобретает вид

$$L_n(t) \leq L_0 + K \int_0^t L_n(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1,$$

где  $K = (1/2)c\sigma_0^{(0)}(1+X)$ . Пользуясь леммой Гронуолла [172], получаем оценку

$$L_n(t) \leq L_0 \exp(KT) = M, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1. \quad (7.39)$$

Поскольку число  $M$  не зависит от номера  $n \geq 1$ , то последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно ограничена на прямоугольнике  $\Pi_T(X)$ .

Далее покажем равномерную непрерывность последовательности решений задачи Коши (7.26)  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  по  $t$ . Предположим, что  $0 \leq t \leq t' \leq T$ . Непосредственно из соотношения (7.26) следует оценка

$$|f_n(x, t') - f_n(x, t)| \leq \int_t^{t'} |[f_n, f_n]_{\Phi_n}| ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1.$$

Воспользовавшись соотношениями (7.28), (7.29), получаем

$$\sup_{0 \leq x \leq X} |[f_n, f_n]_{\Phi_n}| \leq cM \left( \sigma_1^{(0)} + \frac{3}{2} \sigma_0^{(0)} (1 + X) \right) = M_1,$$

следовательно,

$$\sup_{0 \leq x \leq X} |f_n(x, t') - f_n(x, t)| \leq M_1 |t' - t|, \quad n \geq 1. \quad (7.40)$$

Отсюда вытекает равномерная непрерывность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  по  $t$ .

Теперь установим равномерную непрерывность последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  по  $x$ ,  $0 \leq x \leq X$ . Отметим, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |f_n(x', t) - f_n(x, t)| &\leq |f_0(x') - f_0(x)| + \\ &+ \int_0^t ds \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{x'} \Phi_n(x' - y, y) f_n(x' - y, s) f_n(y, s) dy + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x |\Phi_n(x' - y, y) - \Phi(x - y, y)| f_n(x - y, s) f_n(y, s) dy + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \Phi_n(x' - y, y) |f_n(x' - y, s) - f_n(x - y, s)| f_n(y, s) dy + \\ &+ |f_n(x', s) - f_n(x, s)| \int_0^\infty \Phi_n(x', y) f_n(y, s) dy + \\ &\left. + f_n(x, s) \int_0^\infty |\Phi_n(x', y) - \Phi_n(x, y)| f_n(y, s) dy \right\}. \quad (7.41) \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что  $0 \leq x \leq x' \leq X$ . Последовательность ядер  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ , определенная соотношениями (7.25), равномерно непрерывна на любом прямоугольнике  $[0, X] \times [0, a]$ ,  $a > 0$ . Фиксируем

произвольное  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $a = \varepsilon^{-1}$ . Выберем  $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$  так, чтобы были выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{|x'-x|<\delta, \\ 0 \leq x, x' \leq X}} |f_0(x') - f_0(x)| < \varepsilon, \\ \sup_{\substack{|x'-x|<\delta, \\ 0 \leq x, x' \leq X}} |\Phi_n(x', y) - \Phi_n(x, y)| < \varepsilon \end{aligned} \quad (7.42)$$

равномерно относительно  $n \geq 1$  и  $0 \leq y \leq a$ . Воспользовавшись оценками (7.28), (7.37), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} |\Phi_n(x', y) - \Phi_n(x, y)| f_n(y, t) dy = \\ & = \int_0^a |\Phi_n(x', y) - \Phi_n(x, y)| f_n(y, t) dy + \\ & + \int_a^{\infty} |\Phi_n(x', y) - \Phi_n(x, y)| f_n(y, t) dy \leq \\ & \leq \varepsilon \sigma_0^{(0)} + c(1+X) \frac{\sigma_1^{(0)}}{a} + 2 \frac{c\sigma_2(T)}{a} = M_2 \varepsilon, \end{aligned} \quad (7.43)$$

где константа  $M_2 \geq 0$  зависит только от  $c, \sigma_0^{(0)}, \sigma_1^{(0)}, \sigma_2(T), X, T$ . Обозначим

$$\omega_n(t, \varepsilon) = \sup_{\substack{|x'-x|<\delta(\varepsilon), \\ 0 \leq x, x' \leq X}} |f_n(x', t) - f_n(x, t)|$$

— модуль непрерывности функции  $f_n$  по  $x$  на прямоугольнике  $\Pi_T(X)$ . Усиливая неравенство (7.41) при помощи соотношений (7.42), (7.43), получаем

$$\omega_n(t, \varepsilon) \leq K_1 \varepsilon + K_2 \int_0^t \omega_n(s, \varepsilon) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1,$$

где константы  $K_1 \geq 0$  и  $K_2 \geq 0$  зависят только от  $c, M, X, T, \sigma_0^{(0)}, \sigma_1^{(0)}, \sigma_2(T)$ . Применением леммы Гронуолла [172] устанавливаем справедливость следующего неравенства:

$$\omega_n(t, \varepsilon) \leq K_1 \exp(K_2 T) \varepsilon = M_3 \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1.$$

Константа  $M_3$  от номера  $n \geq 1$  и  $\varepsilon > 0$  не зависит. Итак, окончательно имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |f_n(x', t) - f_n(x, t)| \leq M\varepsilon \quad (7.44)$$

при  $|x' - x| < \delta(\varepsilon)$  равномерно относительно  $n$ ,  $n \geq 1$ . Из оценок (7.40), (7.40), (7.44) и теоремы Арцела [94] следует утверждение леммы. Лемма доказана. ■

### § 11. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОАГУЛЯЦИИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЯДРОМ

**Лемма 7.8.** Пусть выполнены условия теоремы 7.2. Тогда задача Коши (7.2) в полосе  $\Pi_T$  имеет решение  $f$ ,

- а) принадлежащее классу  $\Omega_{0,k}^+(T)$ ,  $k \geq 2$ , если начальная функция  $f_0 \in \Omega_{0,k}^+(0)$ ,  $k \geq 2$ ;
- б) принадлежащее классу  $\Omega^+(T)$ , если начальная функция  $f_0 \in \Omega^+(0)$ .

□ Рассмотрим последовательность прямоугольников

$$\Pi^{(i)} = \Pi_T(i), \quad \text{где } i = 1, 2, \dots$$

В силу леммы 7.7 последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  решений задачи Коши (7.26), соответствующая последовательности ограниченных ядер  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$  (7.25), компактна в  $C$  на каждом прямоугольнике  $\Pi^{(i)}$ ,  $i \geq 1$ . Выберем из последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  подпоследовательность  $\{f_{n_k^{(1)}}\}_{k=1}^\infty$ , равномерно сходящуюся на прямоугольнике  $\Pi^{(1)}$ . Из  $\{f_{n_k^{(1)}}\}_{k=1}^\infty$  выберем подпоследовательность  $\{f_{n_k^{(2)}}\}_{k=1}^\infty$ , равномерно сходящуюся на прямоугольнике  $\Pi^{(2)}$ , из  $\{f_{n_k^{(2)}}\}_{k=1}^\infty$  выберем подпоследовательность  $\{f_{n_k^{(i+1)}}\}_{k=1}^\infty$ , равномерно сходящуюся на прямоугольнике  $\Pi^{(i+1)}$ , и т. д. Очевидно, что диагональная последовательность  $\{f_{n_k^{(k)}}\}_{k=1}^\infty$  равномерно сходится на каждом прямоугольнике  $\Pi^{(i)}$ ,  $i \geq 1$  к некоторой функции  $f$ . Ввиду того, что функции  $f^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} f_{n_k^{(k)}}$  непрерывные и неотрицательные, этими свойствами обладает функция  $f$ . По лемме 7.6 все функции  $f^{(i)}$  принадлежат классу  $\Omega_{0,k}^+(T)$ ,  $k \geq 2$ , если  $f_0 \in \Omega_{0,k}^+(T)$ ,  $k \geq 2$ , либо  $f^{(i)} \in \Omega^+(T)$ , если  $f_0 \in \Omega^+(0)$ . Воспользовавшись оценками из леммы 7.6 и леммой Фату [94], получаем, что

$$f \in \Omega_{0,k}^+(T), \quad k \geq 2, \quad \text{если } f_0 \in \Omega_{0,k}^+(0), \quad k \geq 2,$$

$$\text{либо } f \in \Omega^+(T), \quad \text{если } f_0 \in \Omega^+(0),$$

причем для функции  $f$  в силу соотношений (7.37) выполнены следующие неравенства:

$$\int_a^\infty f(x, t) dx \leq \frac{\sigma_1^{(0)}}{a}, \quad \int_a^\infty xf(x, t) dx \leq \frac{2\sigma_2(T)}{a}, \quad (7.45)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad a > 0.$$

Поскольку на каждом прямоугольнике  $\Pi^{(k)}$ ,  $k \geq 1$  функции  $f^{(i)}$  равномерно сходятся к функции  $f$  и выполнены неравенства (7.37), (7.45), то

$$\int_0^\infty |f(x, t) - f^{(i)}(x, t)| dx, \quad \int_0^\infty x|f(x, t) - f^{(i)}(x, t)| dx \rightarrow 0, \quad (7.46)$$

$$i \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно  $0 \leq t \leq T$ .

Рассмотрим невязку  $\delta(x, t)$ :

$$\delta(x, t) = f(x, t) - f_0(x) - \int_0^\infty [f, f]_\Phi ds.$$

Обозначим  $\Phi^{(i)}$  ядра в последовательности  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ , соответствующие функциям  $f^{(i)}$ ,  $i \geq 1$ . Очевидно, что

$$\delta(x, t) = f(x, t) - f^{(i)}(x, t) - \int_0^t \left\{ [f - f^{(i)}, f - f^{(i)}]_{\Phi} + \right. \\ \left. + 2[f - f^{(i)}, f^{(i)}]_{\Phi} + [f^{(i)}, f^{(i)}]_{\Phi - \Phi^{(i)}} \right\} ds.$$

Поскольку

$\Phi^{(i)}(x, y) = \Phi(x, y)$  ( $0 \leq x, y \leq n_i$ ,  $n_i \geq 1$ ),  $n_i \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$ , и имеют место соотношения (7.46), то  $\delta(x, t) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ ,  $(x, t) \in \Pi_T$ , откуда получаем

$$f(x, t) = f_0(x) + \int_0^t [f, f]_\Phi ds.$$

Ввиду того что подынтегральное выражение непрерывно по  $t$ , функция  $f$  является решением задачи Коши (7.2) для уравнения коагуляции с ядром  $\Phi \in \mathcal{K}$ . Тем самым завершается доказательство леммы. ■

**§ 12. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЯДРОМ**

Докажем одну лемму, на которую существенно опирается доказательство утверждения о единственности решения задачи Коши (7.2) в классе  $\Omega(T)$ . Метод доказательства предлагаемой леммы аналогичен методу, применявшемуся при доказательстве известной леммы Хаара [172].

**Лемма 7.9.** Пусть  $v(\lambda, t)$  — непрерывная вещественная функция на множестве

$$D = \{(\lambda, t) : 0 \leq \lambda \leq \lambda_0, 0 \leq t \leq T\}$$

и имеет в этой области непрерывные частные производные  $v_\lambda, v_{\lambda\lambda}$ . Предположим, что  $v, v_\lambda, v_{\lambda\lambda} \geq 0$  на  $D$ . Пусть  $\alpha(\lambda), \beta(\lambda, t), \gamma(\lambda, t)$  — вещественные непрерывные на  $D$  функции и имеют там непрерывные частные производные  $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda$ . Пусть на множестве  $D$  выполнены неравенства

- 1)  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda \geq 0$ ;
- 2)  $v(\lambda, t) \leq \alpha(\lambda) + \int_0^t [\beta(\lambda, s)v_\lambda(\lambda, s) + \gamma(\lambda, s)v(\lambda, s)] ds$ ;
- 3)  $v_\lambda(\lambda, t) \leq \alpha_\lambda(\lambda) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} [\beta(\lambda, s)v_\lambda(\lambda, s) + \gamma(\lambda, s)v(\lambda, s)] ds$ .

Обозначим

$$c_0 = \sup_D \alpha, \quad c_1 = \sup_D \beta, \quad c_2 = \sup_D \gamma.$$

Тогда в области  $R \subset D$

$$R = \left\{ (\lambda, t) : 0 \leq t \leq T', 0 \leq \lambda \leq \lambda_0 - c_1 t, T' = \min \left( \frac{\lambda_0}{c_1}, T \right) \right\}$$

выполнено неравенство

$$v(\lambda, t) \leq c_0 \exp(c_2 t).$$

□ Обозначим правую часть неравенства (2) в условии теоремы величиной  $V$ :

$$V(\lambda, t) = \alpha(\lambda) + \int_0^t [\beta(\lambda, s)v_\lambda(\lambda, s) + \gamma(\lambda, s)v(\lambda, s)] ds, (\lambda, t) \in D. \quad (7.47)$$



Из этого тождества следует справедливость следующих соотношений для функции  $V$ :

$$\begin{cases} V_t(\lambda, t) = \beta(\lambda, t)v_\lambda(\lambda, t) + \gamma(\lambda, t)v(\lambda, t), \\ V(\lambda, 0) = \alpha(\lambda), \quad (\lambda, t) \in D. \end{cases} \quad (7.48)$$

Дифференцируя тождество (7.47) по переменной  $\lambda$ , получаем

$$V_\lambda(\lambda, t) = \alpha_\lambda(\lambda) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} [\beta(\lambda, s)v_\lambda(\lambda, s) + \gamma(\lambda, s)v_\lambda(\lambda, s)] ds, \quad (7.49)$$

$$(\lambda, t) \in D.$$

В силу условий теоремы 2), 3) и полученных тождеств (7.48), (7.49) выполнены неравенства

$$\begin{cases} 0 \leq v(\lambda, t) \leq V(\lambda, t), \\ 0 \leq v_\lambda(\lambda, t) \leq V_\lambda(\lambda, t), \end{cases} \quad (\lambda, t) \in D. \quad (7.50)$$

Подставляя (7.50) в соотношение (7.48), получаем неравенство

$$\begin{cases} V_t(\lambda, t) \leq \beta(\lambda, t)V_\lambda(\lambda, t) + \gamma(\lambda, t)V_\lambda(\lambda, t), \\ V(\lambda, 0) = \alpha(\lambda), \quad (\lambda, t) \in D, \end{cases}$$

из которого окончательно следует

$$\begin{cases} V_t(\lambda, t) \leq c_1 V_\lambda(\lambda, t) + c_2 V(\lambda, t), \\ V(\lambda, 0) \leq c_0, \quad (\lambda, t) \in D, \end{cases} \quad (7.51)$$

причем  $V, V_t, V_\lambda \geq 0$  на множестве  $D$ . Пусть  $c' > c_0, \varepsilon > 0$ . Положим

$$u(\lambda, t) \equiv c' \exp(c_2 t) + \varepsilon \frac{\exp(c_2 t) - 1}{c_2}.$$

Поскольку  $u_\lambda \equiv 0$ , то на множестве  $D$  выполняется тождество

$$u_t(\lambda, t) = c_1 u_\lambda(\lambda, t) + c_2 u(\lambda, t) + \varepsilon. \quad (7.52)$$

Покажем, что на множестве  $R$ , определенном в условиях леммы, имеет место неравенство

$$u(\lambda, t) - V(\lambda, t) > 0, \quad (7.53)$$

откуда предельным переходом  $c' \rightarrow c_0, \varepsilon \rightarrow 0$  получается

$$V(\lambda, t) \leq c_0 \exp(c_2 t), \quad (\lambda, t) \in R,$$

что в силу соотношений (7.50) дает утверждение леммы.

Построение функции  $u$  обеспечивает при малых  $t > 0$  выполнение неравенства

$$u(\lambda, t) - V(\lambda, t) > 0.$$

Если во множестве  $R$  неравенство (7.53) неверное, то можно указать точку  $(\lambda', t') \in \mathbb{R}$ , где  $0 < t' \leq T'$ , такую, что неравенство (7.52) остается справедливым в части множества  $R$  с условием  $0 < t \leq T'$ , а в точке  $(\lambda', t')$  будет иметь место равенство.

Рассмотрим отрезок

$$\mathcal{L} = (t, \lambda' + c_1(t' - t)), \quad 0 \leq t \leq t'.$$

Он находится, очевидно, во множестве  $R$ , причем разность  $u - V$  в точках отрезка  $\mathcal{L}$  положительная при  $0 \leq t < t'$  и равна нулю при  $t = t'$ . Следовательно, производная разности  $u - V$  вдоль отрезка  $\mathcal{L}$  в точке  $t = t'$  неположительная. Таким образом, получаем

$$u_t - V_t - c_1 \frac{\partial}{\partial \lambda}(u - V) \leq 0, \quad t = t', \quad \lambda = \lambda'.$$

Из соотношения (7.51) имеем

$$u_t = c_2 u + \varepsilon,$$

так что  $u_t = c_2 V + \varepsilon$  при  $t = t'$ ,  $\lambda = \lambda'$ . А так как выполняется тождество  $u_\lambda \equiv 0$ , то

$$V_t \geq c_1 V_\lambda + c_2 V + \varepsilon, \quad t = t', \quad \lambda = \lambda',$$

и поскольку  $\varepsilon > 0$ , получаем

$$V_t > c_1 V_\lambda + c_2 V, \quad t = t', \quad \lambda = \lambda'.$$

Но это неравенство противоречит неравенству (7.51).

Следовательно, соотношения (7.53) выполняются всюду на множестве  $R$  и, значит,

$$v(\lambda, t) \leq c_0 \exp(c_2 t), \quad (\lambda, t) \in \mathbb{R}.$$

Лемма доказана. ■

Теперь докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши для уравнения коагуляции с неограниченным ядром  $\Phi \in \mathcal{K}$ , т. е. теорему 7.2.

### Доказательство теоремы 7.2

□ Утверждение о существовании решения задачи Коши (7.2) в классе  $\Omega_{0,k}^+(T)$ ,  $k \geq 2$ , когда  $f_0 \in \Omega_{0,k}^+(0)$ , и в классе  $\Omega^+(T)$ , когда  $f_0 \in \Omega^+(0)$ , доказано в лемме 7.8.

Докажем единственность решения  $f_0 \in \Omega^+(T)$  в классе  $\Omega(T)$ . Предположим, что существует два различных решения задачи Коши (7.2)  $f$  и  $g$ , которые лежат в классе  $\Omega(T)$ , тогда выполняется тождество

$$f - g = \int_0^t [f - g, f + g]_{\Phi} ds.$$

Вводя обозначения  $u = |f - g|$ ,  $\psi = |f + g|$  и воспользовавшись тем, что ядро  $\Phi$  принадлежит шару  $\mathcal{K}_c$  при некотором  $c > 0$ , получаем из этого тождества следующее неравенство:

$$\begin{aligned} u(x, t) \leq & \frac{c}{2} \int_0^t ds \left\{ (1+x) \int_0^x u(x-y, s) \psi(y, s) dy + \right. \\ & + u(x, s) \int_0^{\infty} (1+x+y) \psi(y, s) dy + \\ & \left. + \psi(x, s) \int_0^{\infty} (1+x+y) u(y, s) dy \right\}, \quad (x, t) \in \Pi_T. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Поскольку функции  $f, g \in \Omega(T)$ , то и  $\psi \in \Omega^+(T)$ . Пусть число  $\tilde{\lambda} > 0$  выбрано таким, что

$$\int_0^{\infty} \exp(\tilde{\lambda}x) u(x, t) dx, \quad \int_0^{\infty} \exp(\tilde{\lambda}x) \psi(x, t) dx \leq M < \infty \quad (7.55)$$

равномерно относительно  $0 \leq t \leq T$ . Пусть  $0 \leq \lambda < \tilde{\lambda}$ , тогда интегрируя неравенство (7.54) с весом  $\exp(\lambda x)$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(\lambda x) u(x, t) dx \leq & \frac{c}{2} \int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [\exp(\lambda(x+y)) + \\ & + \exp(\lambda x) + \exp(\lambda y)] (1+x+y) u(x, s) \psi(y, s) dx dy ds. \end{aligned}$$

При интегрировании в правой части этого неравенства мы сделали перестановку порядка интегрирования, пользуясь теоремой Фубини [94]. Усилим полученное неравенство:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(\lambda x) u(x, t) dx \leq & \frac{3}{2} c \int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[\lambda(x+y)] \times \\ & \times (1+x+y) u(x, s) \psi(y, s) dx dy ds. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Аналогичным образом получим следующее неравенство:

$$\int_0^\infty x \exp(\lambda x) u(x, t) dx \leq \frac{3}{2} c \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[\lambda(x+y)] \times \quad (7.57)$$

$$\times (x+y)(1+x+y) u(x, s) \psi(y, s) dx dy ds.$$

Обозначим

$$U(\lambda, t) = \int_0^\infty \exp(\lambda x) u(x, t) dx;$$

$$\Psi(\lambda, t) = \int_0^\infty \exp(\lambda x) \psi(x, t) dx.$$

Функции  $U$  и  $\Psi$  аналитичны в полуплоскости  $\Re \lambda < \tilde{\lambda}$  при любом фиксированном  $0 \leq t \leq T$ . Пусть число  $\lambda$  лежит на вещественной оси и удовлетворяет условиям  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$  ( $0 < \lambda_0 < \tilde{\lambda}$ ), тогда оценки (7.55) гарантируют, что для любого целого  $i$  ( $i \geq 1$ ) справедливы неравенства

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ 0 \leq \lambda \leq \lambda_0}} \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} U(\lambda, t), \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \Psi(\lambda, t) \right\} \leq M_i < \infty. \quad (7.58)$$

Далее, поскольку функции  $u$  и  $\psi$  непрерывны на  $\Pi_T$  и выполнены оценки (7.55), то по заданному  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $\delta(\varepsilon) > 0$ ,  $\delta_i(\varepsilon) > 0$ ,  $i \geq 1$ , такие, что для  $0 \leq t, t' \leq T$ ,  $i \geq 1$  справедливы соотношения

$$\sup_{\substack{0 \leq \lambda \leq \lambda_0, \\ |t-t'| < \delta}} \{ |U(\lambda, t') - U(\lambda, t)|, |\Psi(\lambda, t') - \Psi(\lambda, t)| \} < \varepsilon,$$

$$\sup_{\substack{0 \leq \lambda \leq \lambda_0, \\ |t-t'| < \delta_i}} \left\{ \left| \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} U(\lambda, t') - \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} U(\lambda, t) \right|, \left| \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \Psi(\lambda, t') - \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \Psi(\lambda, t) \right| \right\} < \varepsilon. \quad (7.59)$$

В силу оценок (7.58), (7.59) функции  $U$  и  $\Psi$  непрерывны вместе со своими частными производными по  $\lambda$  при  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Из неравенств (7.56), (7.57) следует, что для  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$  ( $0 < \lambda_0 < \tilde{\lambda}$ ),  $0 \leq t \leq T$  выполнены соотношения

$$U(\lambda, t) \leq \frac{3}{2} c \int_0^t \{ \Psi(\lambda, s) U_\lambda(\lambda, s) + [\Psi(\lambda, s) + \Psi_\lambda(\lambda, s)] U(\lambda, s) \} ds,$$

$$U_\lambda(\lambda, t) \leq \frac{3}{2} c \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ \Psi(\lambda, s) U_\lambda(\lambda, s) + [\Psi(\lambda, s) + \Psi_\lambda(\lambda, s)] U(\lambda, s) \} ds,$$

причем функции  $U$  и  $\Psi$  неотрицательные вместе со своими частными производными по  $\lambda$  в указанной области. Мы находимся в условиях применимости леммы 7.9 в области

$$\mathcal{D} = \{0 \leq \lambda \leq \lambda_0, 0 \leq t \leq T\}.$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{3}{2}c \sup_{\mathcal{D}} \Psi, \quad c_2 = \frac{3}{2}c \sup_{\mathcal{D}} (\Psi + \Psi_\lambda).$$

Тогда в области  $R$ , определенной в лемме 7.9, имеем

$$U(\lambda, t) = 0.$$

Поскольку  $U(x, t)$  — непрерывная функция, то  $u(x, t) = 0$  для  $0 \leq t \leq \tau < T'$ ,  $0 \leq x < \infty$ , а, значит,  $U(\lambda, t) = 0$  в области  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ . Применяя эти рассуждения на отрезке времени  $[\tau, 2\tau]$ , приходим к тому, что  $U(x, t) = 0$  при  $0 \leq \tau \leq 2\tau$ ,  $0 \leq x < \infty$  и, продолжая эту процедуру дальше, заключаем, что  $U(x, t) = 0$  на полосе  $\Pi_T$ , т. е.  $f = g$  на полосе  $\Pi_T$ . Теорема доказана. ■

**Следствие 7.1.** Из компактности в пространстве непрерывных функций последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  на любом прямоугольнике  $\Pi_T(X)$ ,  $0 < X < \infty$ , и единственности построенного решения в классе  $\Omega(T)$  следует, что последовательность  $f_n$  сходится к  $f$  равномерно на каждом прямоугольнике  $\Pi_T(X)$ .

□ Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность решений задачи Коши (7.26) при начальной функции  $f_0 \in \Omega^+(0)$ . В силу свойств компактности этой последовательности, указанных в лемме 7.7, она компактна в метрическом пространстве  $C(T)$ , которое определено в § 1. Из метода построения решения задачи Коши (7.2) в лемме 7.8 следует, что все предельные точки последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  в пространстве  $C(T)$  являются решениями уравнения (1.10), (1.8), принадлежащими классу  $\Omega^+(T)$ . Теорема 7.2 гарантирует наличие только одной предельной точки у этой последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  в метрике пространства  $C(T)$ . ■

**Замечание 7.1.** Вместо последовательности ядер, определенных соотношениями (7.25), можно было использовать произвольную последовательность ядер  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$  из класса  $\mathcal{K}_0^+$ , принадлежащих фиксированному шару  $\{\Phi: \Phi \in \mathcal{K}_c\}$ , при условии что  $r(\Phi_n, \Phi) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Использование финитных ядер  $\Phi_n \rightarrow \Phi$ , сходящихся в шаре  $\mathcal{K}_c$ , дает возможность построить приближенное решение уравнения (1.10), (1.8), обрезая бесконечные пределы интегрирования в правой

части этого уравнения. Это вытекает из утверждения следствия 7.1. Данное замечание имеет особую ценность для применения вычислительной техники в случае построения приближенного решения уравнения коагуляции с физически реальными ядрами взаимодействия коагулирующих частиц.

**Замечание 7.2.** Неограниченность ядра с порядком роста, превосходящим линейный, приводит к совершенно необычным по своим свойствам решениям уравнения Смолуховского. В частности, эволюция начального финитного неотрицательного спектра в случае мультипликативного ядра  $\Phi(x, y) = xy$  приводит к несуществованию интегральных моментов решения, начиная со второго момента. Это влечет за собой такое необычное свойство решения как нарушение соотношения сохранения массы. Она начинает монотонно убывать. Подробнее эти свойства изложены в нижеследующих разделах этой главы. Косвенным свидетельством тому служит простая выкладка, приводящая к противоречию с неотрицательностью решения уравнения Смолуховского, если предположить выполнение соотношения сохранения при всех неотрицательных значениях времени. Действительно, предполагая существование неотрицательного решения  $f \in \Omega_{0,2}^+(T)$  у уравнения (1.1<sub>0</sub>), (1.8) при  $t \geq 0$  с ядром  $\Phi(x, y) = xy$ , получаем, что на этом решении необходимо выполняется следующее тождество:

$$\int_0^{\infty} f(x, t) dx = \sigma_0^{(0)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^{(0)})^2 t,$$

где коэффициенты в правой части заданы формулами

$$\sigma_0^{(0)} = \int_0^{\infty} f_0(x) dx, \quad \sigma_1^{(0)} = \int_0^{\infty} x f_0(x) dx.$$

Очевидно, при

$$t > \frac{2\sigma_0^{(0)}}{(\sigma_1^{(0)})^2}$$

оно противоречит неотрицательности функции  $f$ . Таким образом, число  $T$  не может превосходить величины  $2\sigma_0^{(0)}/(\sigma_1^{(0)})^2$ . Это означает, что решение в классе  $\Omega_{0,2}^+(T)$  может существовать лишь локально. Подробно данные эффекты разобраны ниже.

**Замечание 7.3.** Решение задачи Коши (7.2), построенное в теореме 7.2 с начальной функцией  $f_0 \in \Omega(0)$  (случай б) в формулировке), является локально аналитическим по  $t$  в окрестности каждой точки  $t \geq 0$ . Это утверждение получается буквальным повторением рассуждений леммы 7.7 (применявшейся для ограниченных ядер  $\Phi$ ), когда решение задачи Коши ищется в виде формального ряда (7.15)

с коэффициентами (7.16). Но для неограниченных ядер  $\Phi \in \mathcal{K}$  из теоремы 7.2 в отличие от леммы 7.4 мажоранта для ряда (7.15) получается уже не на основе оценок (7.18), а за счет построения локально аналитического в окрестности точки  $(\lambda = 0, t = 0)$  решения задачи Коши вида (7.32). Коэффициенты тейлоровского разложения при  $t = 0$  ее решения  $\sigma(\lambda, t)$  мажорируют соответствующие коэффициенты формального ряда (7.15), что обеспечивает его сходимость в норме пространства

$$(\Omega_\lambda^{(0)}, \|\cdot\|_\lambda^{(0)})$$

при некотором положительном  $\lambda$ . Поскольку решение задачи Коши (7.2) в случае б) теоремы 7.2 не покидает множество  $\Omega(0)$  при всех  $t \geq 0$ , то приведенное локальное рассуждение для окрестности точки  $t = 0$  распространяется на все неотрицательные значения времени. Следует подчеркнуть, что это свойство не имеет места для ядер с порядком роста на бесконечности, превосходящим линейный. Пример тому дает точное решение задачи Коши (7.2) с ядром  $\Phi(x, y) = xy$ , см. пример 1.2. В случае этого ядра при любой суммируемой неотрицательной начальной функции  $f_0 \neq 0$  существует критический момент времени  $t_c = (\sigma_2(0))^{-1}$ , когда происходит потеря гладкости решения по времени  $t$  в точности до класса  $C^1$ . Последнее напрямую связано с возникновением градиентной катастрофы при  $t = t_c$  у решения квазилинейного уравнения холповского вида, получающегося из уравнения Смолуховского преобразованием Лапласа по массам — вещественного аналога уравнения для производящей функции  $\sigma$  в задаче (7.32).

Отметим, что обоснование локальной аналитичности решения удобно проводить в норме

$$\|\varphi\|_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \|\varphi\|_\lambda^0 \exp(\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Локально аналитическое решение задачи Коши для уравнения Смолуховского (1.10), (1.8) с ядром  $\Phi \in \mathcal{K}_c$  мажорируется производящей функцией [125]

$$u(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda) t^k$$

с коэффициентами  $u_k$ , определяемыми по формулам

$$u_{k+1}(\lambda) = \frac{3c}{2(n+1)} \sum_{i+j=k} \frac{d}{d\lambda} (u_i(\lambda) u_j(\lambda)), \quad k \geq 0,$$

$$u_0(\lambda) = \|f_0\|_\lambda, \quad f_0 \in \Omega_{\lambda_0}^+, \quad \lambda_0 > 0.$$

По теореме Коши—Ковалевской [101–104] эти формальные соотношения определяют локальное аналитическое решение в окрестности начала координат для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3cu \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$$

с начальным условием  $u(\lambda, 0) = u_0(\lambda)$ .

### § 13. ПЕРЕХОД СООТНОШЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ В СООТНОШЕНИЕ ДИССИПАЦИИ

До сих пор в настоящей главе исследован класс задач, содержащий примеры из кинетической теории коагуляции и теории газов, для которых в каждый момент времени  $t > 0$  оставалось неизменным значение интеграла  $\langle f, \mu \rangle$  на решении  $f$  по мере  $\mu$ , порожденной соотношением сохранения массы для сталкивающихся частиц. Существенной чертой, характеризующей операторы столкновений для этих задач, является их локальная липшиц-непрерывность в норме  $\|\cdot\|_\mu$ , связанной с соответствующим законом сохранения, либо регуляризуемость задачи.

Проводимое ниже исследование случая пространственно однородной коагуляции, который не вкладывается в результаты предыдущих глав, позволяет выявить интересное явление, когда соотношение сохранения  $\langle S, \mu \rangle = 0$  переходит в строгое неравенство  $\langle S, \mu \rangle < 0$ , выполняющееся при всех моментах времени, больших некоторого критического значения  $t_c$ . Иначе говоря, отмеченное свойство характеризует оператор столкновений. В критический момент времени  $t_c$ , когда соотношение сохранения переходит в диссипацию, решение кинетического уравнения теряет порядок гладкости.

Дальнейшее содержание главы посвящено исследованию решений двух математических моделей процесса коагуляции. Первая модель — это задача Коши для эволюционного уравнения Смолуховского

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mu, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_0^\mu \Phi(\mu - \mu_1, \mu_1) f(\mu - \mu_1, t) f(\mu_1, t) d\mu_1 - \\ &- f(\mu, t) \int_0^\infty \Phi(\mu, \mu_1) f(\mu_1, t) d\mu_1 \quad t > 0, \quad \mu \geq 0, \\ f(\mu, 0) &= f_0(\mu) \geq 0, \quad \mu \geq 0, \end{aligned} \tag{7.60}$$

где интенсивность столкновений определена формулой

$$\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1, \quad \mu, \mu_1 \geq 0.$$

Вторая модель связана с процессами коагуляции при наличии внешнего источника частиц  $q(\mu) \geq 0$  в предположении стационарности спектра  $f$ , что приводит к рассмотрению уравнения

$$S^{(\omega)}(f) + q^{(\omega)} = 0, \quad \omega \in \Omega, \tag{7.61}$$



где  $S$  — оператор столкновений Смолуховского для непрерывных или дискретных масс,  $q \geq 0$  — интенсивность появления в коагулирующей системе частиц под действием стационарного внешнего источника. Когда интенсивность столкновений частиц в этом уравнении строго положительная, его решения не могут принадлежать множеству консервативности  $K_\mu$  оператора столкновений  $S$ , ибо  $S(f) < 0$  для  $q > 0$ . Ниже доказывается существование таких неотрицательных решений при произвольном суммируемом неотрицательном источнике  $q$ .

В первой модели выбор функции слияния частиц обусловлен прежде всего тем, что удастся получить ряд формул, полезных для анализа рассматриваемого круга явлений. Следует подчеркнуть специфику ядра  $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$ , состоящую в том, что для него не применимы методы, развитые выше в этой главе. Причина в том, что функция  $\Phi$  на бесконечности растет быстрее линейной функции, что характерно также для ядра гравитационной коагуляции, имеющем огромное значение для физики атмосферы [28].

Задача (7.60) с непрерывным, симметричным, неотрицательным ядром  $\Phi(\mu, \mu_1)$ , удовлетворяющим условию роста на бесконечности

$$\sup_{\mathbb{R}_2^+} \Phi(\mu, \mu_1)(1 + \mu + \mu_1)^{-1} < \infty,$$

исследована в [36, 37, 48], где установлена ее корректность.

Вкратце остановимся на особенностях решения задачи (7.60) с мультипликативным ядром  $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$ . Коагуляционный оператор столкновений обладает  $\mu d\mu$  свойством сохранения и  $d\mu$  свойством диссипации, при этом он непрерывен в норме, связанной с соотношением сохранения, на классе неотрицательных функций с ограниченным вторым моментом

$$\sigma = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mu^2 f(\mu) d\mu < \infty.$$

Обозначим

$$n(t) = \int_{\mathbb{R}_1^+} f(\mu) d\mu, \quad m(t) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mu f(\mu) d\mu,$$

где  $n(t)$  — концентрация частиц;  $m(t)$  — средняя плотность вещества, заключенная в коагулирующих частицах. Для решений уравнения (7.60) с ограниченным вторым моментом  $\sigma$  справедлива следующая связь между функциями  $n(t)$ ,  $m(t)$ :

$$n(t) = n(0) - m^2(0) \frac{t}{2}, \quad t \geq 0, \quad (7.62)$$

при этом

$$m(t) = m(0). \tag{7.63}$$

Формулы (7.62), (7.63) имеют место до тех пор, пока  $\sigma < \infty$ , ибо тогда

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} \mu S(f) d\mu = 0 \quad (\sigma < \infty). \tag{7.64}$$

Когда же  $\sigma = +\infty$ , то справедливо лишь неравенство

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \mu S(f) d\mu < 0 \quad (f \geq 0, \quad \sigma = +\infty),$$

что означает переход соотношения сохранения  $\langle S(f), \nu \rangle = 0$ , где  $\nu = \mu d\mu$ , в соотношение диссипации

$$\langle S(f), \nu \rangle < 0 \quad (f \geq 0, \quad \sigma = +\infty), \tag{7.65}$$

и, следовательно, функция  $m(t)$  в этом случае монотонно убывает.

Непосредственным интегрированием устанавливается, что закон изменения второго момента решения задачи (7.60) с ядром  $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$  подчиняется соотношению

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(0)[1 - t\sigma(0)]^{-1}, & 0 \leq t < \sigma^{-1}(0), \\ +\infty, & t \geq \sigma^{-1}(0). \end{cases}$$

Таким образом, величина  $\sigma(t)$  конечна только в промежутке

$$0 \leq t < \sigma^{-1}(0),$$

и, следовательно, только в этом интервале времени выполняется соотношение сохранения (7.64).

Локальная по времени теория задачи Коши (7.60) с ядром коагуляции  $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$  для интервала

$$0 \leq t < t_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sigma(0)}$$

построена в работе [242]. На этом отрезке времени задача (7.60) эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mu, t)}{\partial t} &= \bar{S}(f), \quad t > 0, \quad \mu \geq 0, \\ f(\mu, 0) &= f_0(\mu) \geq 0, \quad \mu \geq 0, \end{aligned} \tag{7.66}$$

где оператор  $\bar{S}$  определен соотношениями

$$\bar{S}(f) = \frac{1}{2} \int_0^\mu \Phi(\mu - \mu_1, \mu_1) f(\mu - \mu_1, t) f(\mu_1, t) d\mu_1 - \mu f(\mu, t) m(0),$$

$$m(0) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mu f_0(\mu) d\mu.$$

Таким образом, при  $t \geq t_c$  задачи (7.60) и (7.66) различны.

Ниже доказывается корректность задачи (7.60) при всех  $t \geq t_c$ . При этом получены формулы для концентрации  $n(t)$  и плотности массы  $m(t)$ , когда  $t \geq t_c$ , установлена связь перехода соотношения сохранения (7.64) в диссипацию (7.65) с формированием градиентной катастрофы на оси  $p = 0$  у следующего функционала решения:

$$F(p, t) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mu \exp(-p\mu) f(\mu, t) d\mu, \quad p \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Физическим аспектам упоминавшихся явлений посвящена обширная литература [28, 29].

#### § 14. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Обозначим  $\mathcal{E}$  множество непрерывных функций  $f(\mu, t)$ , определенных при  $(\mu, t) \in \mathbb{R}_2^+$  и имеющих при  $t \in \mathbb{R}^+$  непрерывный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + \mu) |f(\mu, t)| d\mu,$$

$\mathcal{E}_0$  — множество сужений функций  $f \in \mathcal{E}$  на оси  $t = 0$ . Символами  $\mathcal{E}^+$ ,  $\mathcal{E}_0^+$  обозначим неотрицательные функции из  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}_0$  соответственно.

Справедлива следующая теорема о корректности задачи Коши (7.60) с мультипликативным ядром  $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$ .

**Теорема 7.3.** Уравнение (7.60) с ядром  $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$  имеет единственное решение  $f \in \mathcal{E}^+$  при любой начальной функции  $f_0 \in \mathcal{E}^+$ , причем это решение гладкое по  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**Теорема 7.4.** Пусть выполнены условия теоремы 7.60. Тогда справедливы соотношения

$$n(t) = G(\pi(t)) - G_p^2(\pi(t)) \frac{t}{2}, \quad t \geq 0, \quad (7.67)$$

$$m(t) = -G_p(\pi(t)), \quad t \geq 0, \quad (7.68)$$

где функция

$$G(p) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu) f_0(\mu) d\mu, \quad p \geq 0,$$

— вещественное преобразование Лапласа начального спектра  $f_0$ , а неотрицательная функция  $\pi(t)$  определяется формулами

$$\pi(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_c = G_{pp}^{-1}(0); \quad (7.69)$$

$$G_{pp}(\pi(t)) = t^{-1}, \quad t \geq t_c. \quad (7.70)$$

**Замечание 7.4.** Второй момент начального распределения вычисляется по формуле

$$\sigma(0) = G_{pp}(0).$$

Поэтому в силу соотношения (7.69) при  $0 \leq t < t_c$  теоремы 7.3 и 7.4 приводят к известным формулам [242]. В этом случае формулы (7.67), (7.68) совпадают с формулами (7.62), (7.63). Для  $t > t_c$  происходит непрерывный переход соотношения сохранения плотности массы (7.63) в соотношение диссипации (7.68). Поскольку корень уравнения (7.70)  $\pi(t) \rightarrow +\infty$ , когда  $t \rightarrow +\infty$ , то

$$m(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Характер убывания  $m(t)$  существенно зависит от поведения  $G(p)$  при больших аргументах, т. е. в силу свойств преобразования Лапласа для начальной функции  $f_0$  он определяется спектром малых частиц. Если  $\sigma(0) = +\infty$ , то диссипация массы начинается мгновенно с критического момента времени  $t_c = 0$ .

**Замечание 7.5.** Условия теоремы 7.3 можно ослабить, потребовав лишь непрерывность неотрицательной функции  $\mu f(\mu, t)$  и соответственно непрерывность интеграла

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} \mu f(\mu, t) d\mu, \quad t \geq 0.$$

Тогда, вообще говоря, концентрация  $n(t)$  может быть бесконечной из-за расходимости в нуле интеграла

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} f_0(\mu) d\mu.$$

Плотность массы  $m(t)$  определяется формулами (7.68), (7.69), (7.70), где функция  $G_p(p)$  задана следующим соотношением:

$$G_p(p) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu) f_0(\mu) \mu d\mu, \quad p \geq 0.$$

**Замечание 7.6.** Для функционала решения  $f$  задачи Коши (7.60)

$$F(p, t) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mu \exp(-p\mu) f(\mu, t) d\mu, \quad p \geq 0, \quad t \geq 0,$$

справедлива следующая неявная формула:

$$F = F_0 \left( p - tF + \int_0^t m(s) ds \right), \quad p \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (7.71)$$

где  $F_0 = -G_p$ , а значение  $m(t)$  находится из соотношений (7.68), (7.69), (7.70). Для того, чтобы удовлетворить начальным условиям, из множества решений уравнения (7.71) следует выделить функцию, стремящуюся к  $F_0$  при  $t \rightarrow +0$ .

**Замечание 7.7.** Теоремы, аналогичные теоремам 7.3, 7.4, справедливы для решения  $\bar{f}(\mu, t)$  задачи (7.66). В этом случае функция

$$\bar{F}(p, t) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mu \exp(-p\mu) \bar{f}(\mu, t) d\mu, \quad p \geq 0, \quad t \geq 0$$

удовлетворяет неявной формуле

$$\bar{F}(p, t) = F_0 (p - t\bar{F} + F_0(0)t), \quad p \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (7.72)$$

где  $F_0 = -G_p$ . Формулы (7.71), (7.72) при  $0 \leq t \leq t_c$  совпадают. Плотность массы  $\bar{m}(t)$  в этом случае отыскивается из соотношения

$$\bar{m}(t) = -G_p(\bar{\pi}(t)), \quad t \geq 0, \quad (7.73)$$

где функция  $\bar{\pi}(t)$  — наибольший неотрицательный корень уравнения

$$F_0(\bar{\pi})t + \bar{\pi} = F_0(0)t, \quad t \geq 0.$$

Очевидно,  $\bar{\pi}(t) = 0$  в интервале  $0 \leq t \leq t_c$ . Когда  $t > t_c$ , выполняется неравенство  $\bar{\pi}(t) \geq \pi(t)$ .

Следует подчеркнуть, что уравнение (7.73) имеет на неотрицательной части вещественной оси ровно два корня, если  $t > t_c$ ,  $f_0 \neq 0$ , причем один из них равен нулю, а второй — положительный корень  $\bar{\pi}(t)$ , который ответвляется от нулевого в критический момент времени  $t_c$ . Эта бифуркация нулевого корня порождает переход соотношения сохранения массы в ее диссипацию. Таким образом, для  $0 \leq t \leq t_c$  решения задач (7.60) и (7.66) совпадают, а в дальнейшем они различаются. Решение задачи (7.60) по прошествии критического времени  $t_c$  приводит к меньшим значениям концентрации и плотности массы по сравнению с задачей (7.66), так как в силу монотонного убывания вещественного преобразования Лапласа для неотрицательной функции  $f_0$  выполнено неравенство

$$F_0(\bar{\pi}(t)) \geq F_0(\pi(t)), \quad t > t_c.$$

Физическим объяснением этого эффекта служит то, что уравнение (7.66) наряду со столкновительным оператором коагуляции  $S$  содержит сток частиц, действующий с интенсивностью

$$-\mu \bar{f}(\mu, t) [m(0) - \bar{m}(t)].$$

**Замечание 7.8.** Для решений  $f$  уравнения (7.60) и  $\bar{f}$  для уравнения (7.66), соответствующих одинаковым начальным данным, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f &= \bar{f}, & 0 \leq t \leq t_c, \\ f &\geq \bar{f}, & t > t_c. \end{aligned}$$

Последнее неравенство есть результат действия стока, упомянутого в замечании 7.7.

**Пример 7.2.** Для наглядного сравнения результатов решения уравнений (7.60) и (7.66) рассмотрим пример с начальным распределением частиц

$$f_0(\mu) = \mu^{-1} \exp(-\mu), \quad \mu \geq 0,$$

который вкладывается в условия для теоремы 7.3, указанные в замечании 7.3. Решим уравнения (7.71), (7.72) с учетом требования прищипывания решения к начальной функции и аналитически продолжим по аргументу  $p$  в комплексную плоскость полученные выражения. Используя обратное преобразование Лапласа [77], имеем

$$\bar{f}(\mu, t) = \mu^{-2} t^{-1/2} I_1(2\mu t^{-1/2}) \exp[-\mu(1+t)], \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+,$$

для оригинала  $\bar{f}(\mu, t)$  решения уравнения (7.72), а для оригинала  $f(\mu, t)$  решения уравнения (7.71) —

$$f(\mu, t) = \begin{cases} \bar{f}(\mu, t), & \mu \in \mathbb{R}^+, 0 \leq t \leq t_c, \\ \mu^{-2} t^{-1/2} I_1(2\mu t^{-1/2}) \exp[-2\mu t^{-1/2}], & \mu \in \mathbb{R}^+, t > t_c, \end{cases}$$

где  $I_1$  — функция Бесселя мнимого аргумента. Критический момент времени  $t_c$  определяется равенством  $t_c = 1$ . Очевидно,  $f > \bar{f}$ , если  $t > t_c$ . Соответствующие формулы для плотности массы имеют вид

$$\bar{m}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_c = 1, \\ t^{-1}, & t > t_c, \end{cases} \quad m(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_c = 1, \\ t^{-1/2}, & t > t_c. \end{cases}$$

Концентрация частиц в обоих случаях равна бесконечности из-за расходимости интеграла (по мере  $d\mu$ ) начальной функции  $f_0$  в окрестности точки  $\mu = 0$ .

**Замечание 7.9.** Выражение для коагуляционного спектра в примере 7.2 указывает на то, что начиная с момента времени  $t_c$  решение уравнения Смолуховского (1.10), (1.8) с ядром  $\Phi(x, y) = xy$  выходит на автомоделный режим, а именно

$$f(x, t) = t^{1/2} \psi(\Theta), \quad \Theta = 2xt^{1/2}, \quad t \geq t_c,$$

где

$$\psi(\Theta) = 4\Theta^{-1}I_1(\Theta)\exp(-\Theta), \quad (\Theta) > 0.$$

Следует подчеркнуть, что при  $t < t_c$  решение не является автомодельным, и при этих значениях времени не существует автомодельных решений. На приведенном автомодельном решении не выполняется соотношение сохранения. Поэтому этот класс автомодельных решений следует называть диссипативным. Иные примеры диссипативных автомодельных решений приведены в замечании 7.17 для ядер, отыскиваемых методом обратной задачи.

**Замечание 7.10.** Когда  $t > t_c$ , существует бесконечное множество начальных функций с различной плотностью массы  $m(0)$ , которые переходят в заданное решение  $f$  при достаточно больших значениях времени  $t > t_c$ . Действительно, по формулам (7.68)–(7.71) прямыми вычислениями устанавливаем, что в случае ядра  $\Phi = xy$  для семейства начальных данных

$$f_0^\varepsilon(x) = \exp(-\varepsilon)f_0(x), \quad \varepsilon \geq 0,$$

при функции  $f_0$ , удовлетворяющей условиям теоремы 7.3, решения уравнения Смолуховского (1.1<sub>0</sub>), (1.8) совпадают при достаточно больших  $t > 0$ . При этом следует использовать следующую формулу, которая эквивалентна (7.71):

$$F = F_0[p + t(m(t) - F) + \pi(t)], \quad p \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Неединственность начальных данных, приводящих к значениям решения  $f$  при  $t > t_c$ , означает нарушение локальной аналитичности решения по времени в точке  $t = t_c$ , что существенно отличает рассматриваемый случай ядра  $\Phi = xy$  от результатов, полученных в гл. 1, 2. Решения, построенные в этих главах, являются локально аналитическими по времени в окрестности множества  $t \geq 0$  при достаточно быстро спадающих начальных данных при  $x \rightarrow \infty$ .

**Замечание 7.11.** Для ядра  $\Phi = xy$  при начальной функции  $f_0 \sim cx^\alpha$  при  $x \rightarrow 0$  справедлива формула [36, 37]

$$m(t) \sim c^{(5+2\alpha)/(3+\alpha)}\Gamma(2+\alpha)\Gamma^{(2+\alpha)/(3+\alpha)}(3+\alpha)t^{(2+\alpha)/(3+\alpha)}, \quad t \rightarrow 0.$$

В случае когда

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ \text{и} \quad f_0 &\sim c(x - x_0)^\alpha \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0 + 0, \end{aligned}$$

имеет место формула

$$m(t) \sim x_0 t^{-1}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \alpha > -1.$$

Асимптотическое поведение решения при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  описывается формулами

$$f(x, t) \sim A(c, \alpha)t^{(5+2\alpha)/(2(3+\alpha))}x^{-5/2}, \quad \alpha > -2,$$

если  $f_0 \sim cx^\alpha$  при  $x \rightarrow 0$  ( $A(c, \alpha)$  — положительная постоянная). Если же

$$f_0 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_0$$

$$\text{и} \quad f_0 \sim c(x - x_0)^\alpha \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0 + 0,$$

то

$$f(x, t) \sim 2^{1/2} \pi^{-1} t^{-1} x^{-5/2}, \quad x_0 > 0.$$

**§ 15. ФОРМУЛЫ ДЛЯ МОМЕНТОВ (ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.4)**

Установим справедливость формул (7.68)–(7.73), априори предполагая существование решения уравнения (7.60), указанное в теореме 7.3. Положим  $\varphi = \mu f$ , где  $f \in \mathcal{E}^+$  является решением уравнения (7.60) с ядром коагуляции

$$\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1.$$

Очевидно, имеет место тождество

$$\frac{\partial \varphi(\mu, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \varphi * \varphi - \mu \varphi m(t), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+, \quad (7.74)$$

где операция  $*$  — свертка по переменной  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Тогда вещественное преобразование Лапласа

$$F(p, t) = \int_{\mathbb{R}^+} \exp(-p\mu) \varphi(\mu, t) d\mu, \quad p \geq 0, \quad t \geq 0,$$

удовлетворяет уравнению хопфовского вида [51]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F - m] \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \quad (p > 0, \quad t > 0), \quad (7.75)$$

$$m(t) = F(0, t).$$

В силу свойств преобразования Лапласа и требования  $f \in \mathcal{E}^+$  функция  $F(p, t)$  при  $p \geq 0, t \geq 0$  — непрерывная неотрицательная монотонно убывающая по аргументу  $p \in \mathbb{R}^+$ . Запишем уравнение характеристик для уравнения (7.75):

$$p(t) = p_0 + tF_0(p_0) - \int_0^t m(s) ds, \quad p_0 > 0, \quad t \geq 0, \quad (7.76)$$

$$F_0(p) = F(p, 0).$$

Поскольку  $m(t) \equiv F(0, t)$ , то координатная ось

$$\{(p, t): p = 0, t \geq 0\}$$



также является характеристикой. Характеристики, выходящие из точки  $p_0 > 0$ , пересекаются с другими характеристиками в силу свойства убывания начальной функции  $F_0$  по аргументу  $p$ , причем точная нижняя грань моментов времени пересечения определяется соотношением

$$t_{p_0} = \frac{-1}{F_0'(p_0)}, \quad p_0 \geq 0, \quad (7.77)$$

где  $t_{p_0}$  — момент времени образования особенности функции  $F$  на рассматриваемой характеристике. Ввиду того что

$$\sigma(0) = -F_0'(0),$$

наименьший момент времени возникновения особенности равен

$$t_c = \sigma^{-1}(0). \quad (7.78)$$

Поле характеристик уравнения (7.75) в первой четверти плоскости  $(p, t)$  направлено справа налево из-за неотрицательности функции  $f$ . Поэтому из требования непрерывности функции  $F$  при  $p \geq 0, t \geq 0$  вытекает, что значения  $F(0, t)$  определяются значениями начальной функции  $F_0$ , переносимыми вдоль характеристик, выходящих из точек  $(p_0 > 0, t = 0)$ . Из условия пересечения характеристики, выходящей из точки  $(\pi > 0, t = 0)$  с вертикальной характеристикой  $(p = 0, t \geq 0)$ , получаем равенство

$$1 + tF_0'(\pi) = 0. \quad (7.79)$$

Сравнивая соотношения (7.77), (7.78), (7.79), убеждаемся, что начиная с момента времени  $t_c$  на оси  $p = 0$  возникает особенность функции  $F$ , вызванная пересечениями характеристик. Отметим, что для любой характеристики формирование особенности на ней начинается в момент пересечения с осью  $p = 0, t \geq 0$ , что определяется формулами (7.77), (7.79). В силу непрерывности функции  $F$  в окрестности линии  $p = 0, t \geq 0$ , имеем

$$\begin{cases} F(0, t) = F_0(0), & 0 \leq t \leq t_c, \\ F_0(\pi(t)), & t \geq t_c, \end{cases}$$

где  $\pi(t)$  — положительный корень уравнения (7.79). Поскольку функции  $F_0, -F_0'$  строго монотонно убывают (в предположении, что решение  $f > 0$ ), стремясь к нулю при  $p \rightarrow +\infty$ , то нетрудно установить, что при  $t > t_c$  для положительной начальной функции  $f_0$  существует единственный положительный корень  $\pi(t) \rightarrow +\infty$ , когда  $t \rightarrow +\infty$ . Этот корень примыкает к нулю при  $t \rightarrow +0$ . Итак, установлена формула (7.68) для плотности массы  $m(t)$ .

Перейдем теперь к получению формулы для концентрации частиц. Очевидно,

$$n(t) = \int_{\mathbb{R}^+} F(p, t) dp, \quad t \geq 0. \quad (7.80)$$

На характеристиках (7.76) выполняется тождество

$$F(p(t), t) = F_0(p_0), \quad p_0 > 0, \quad t \geq 0. \quad (7.81)$$

Заменяем в (7.80) функцию  $F(p, t)$  ее значением  $F_0(p_0)$  и выразим переменную интегрирования через  $p_0$ :

$$n(t) = \int_{\pi(t)}^{+\infty} F_0(p_0) (1 + F_0'(p_0)) dp_0, \quad t \geq 0.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$n(t) = G(\pi(t)) - G_p^2(\pi(t)) \frac{t}{2}, \quad t \geq 0,$$

где

$$G(p) = \int_{\mathbb{R}^+} \exp(-p\mu) f_0(\mu) d\mu, \quad p \geq 0.$$

Неявная формула (7.71) из замечания 7.6 устанавливается сочетанием тождества (7.81) и уравнения характеристик (7.76).

Покажем, что особенность функции  $F$ , находящаяся на линии

$$p = 0, \quad t \geq t_c = \sigma^{-1}(0),$$

является градиентной катастрофой, а именно, в этих точках

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial p} \Big|_{p=0} = -\infty,$$

что соответствует обращению в бесконечность второго момента решения уравнения (7.60). Дифференцируя (7.68) по переменной  $p$  в точке  $p = 0$ , имеем

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial p} \Big|_{p=0} = F_0'(\pi(t)) [1 + tF_0'(\pi(t))]^{-1}, \quad t \geq 0,$$

где  $\pi(t)$  определяется соотношениями (7.69), (7.70). Таким образом,

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial p} \Big|_{p=0} = \begin{cases} -\sigma(0)[1 - t\sigma(0)]^{-1}, & 0 \leq t < t_c, \\ -\infty, & t \geq t_c. \end{cases}$$

Поскольку  $\sigma(t) = -F_p(0, t)$ , то значения второго момента функции  $f$  с точностью до знака определяются полученной формулой.

### § 16. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.3

В предыдущем разделе получены выражения для функции  $m(t)$  при условии принадлежности решения задачи (7.60) классу  $\mathcal{E}^+$ . Подчеркнем, что величина  $m(t)$  определяется по формулам (7.68)–(7.70) для данного класса решений единственным образом, причем указанные формулы являются необходимым условием существования такого решения.

Вместо задачи (7.60) будем рассматривать задачу Коши для уравнения (7.74), предполагая, что задана соответствующая начальная функция

$$\varphi^{(0)}(\mu) = \mu f_0(\mu), \quad f_0 \in \mathcal{E}_0^+.$$

Доказательству теоремы 7.3 предположим ряд предварительных утверждений.

**Лемма 7.10.** *Последовательность функций  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ , определенная формулами*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{n+1}(\mu, t)}{\partial t} &= \int_0^\mu \mu_1 \varphi_n(\mu - \mu_1, t) \varphi_{n+1}(\mu_1, t) d\mu_1 - \mu \varphi_{n+1}(\mu, t) m(t), \\ \mu, t &\in \mathbb{R}^+, \\ \varphi_{n+1}(\mu, 0) &= \varphi^{(0)}(\mu), \quad \varphi_0 \equiv 0, \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{7.82}$$

монотонно возрастает с номером  $n \geq 0$  при условии, что функция  $m(t)$  определяется формулами (7.68)–(7.70).

□ Утверждение леммы получим методом математической индукции по номеру  $n \geq 0$ . Корректность задачи (7.82) при каждом  $n \geq 0$  устанавливается методом сжимающих отображений, обычным для уравнения Вольтерра [94]. Поэтому остановимся на вопросе монотонности последовательности  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ . Полагая  $n = 0$  в (7.82), имеем

$$\frac{\partial \varphi_1(\mu, t)}{\partial t} = -\mu \varphi_1(\mu, t) m(t), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+.$$

Поскольку  $\varphi_1(\mu, 0) \geq 0$ , то  $\varphi_1(\mu, t) \geq 0 \equiv \varphi_0(\mu, t)$ . Таким образом, на первом шаге индукции утверждение леммы справедливо.

Положим теперь, что

$$\varphi_0(\mu, t) \leq \varphi_1(\mu, t) \leq \dots \leq \varphi_n(\mu, t), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+, \quad n > 0.$$

Покажем при этих условиях справедливость неравенства

$$\varphi_n(\mu, t) \leq \varphi_{n+1}(\mu, t), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+.$$

Обозначим

$$u = \varphi_{n+1}(\mu, t) - \varphi_n(\mu, t), \quad z = \varphi_n(\mu, t) - \varphi_{n-1}(\mu, t).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mu, t)}{\partial t} &= \int_0^\mu \mu_1 \varphi_n(\mu - \mu_1, t) u(\mu_1, t) d\mu_1 + \\ &+ \int_0^\mu \mu_1 \varphi_n(\mu - \mu_1, t) z(\mu_1, t) d\mu_1 - \mu u(\mu, t) m(t), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(\mu, 0) &\geq 0. \end{aligned}$$

По индукционному предположению  $\varphi_n(\mu, t) \geq 0$ ,  $z \geq 0$ . Таким образом, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mu, t)}{\partial t} &\geq \int_0^\mu \mu_1 \varphi_n(\mu - \mu_1, t) u(\mu_1, t) d\mu_1 - \mu u(\mu, t) m(t), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(\mu, 0) &\geq 0. \end{aligned}$$

Полагая

$$u(\mu, t) = \psi(\mu, t) \exp\left(-\mu \int_0^t m(s) ds\right),$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\mu, t)}{\partial t} &\geq \int_0^\mu G(\mu, \mu_1, t) \psi(\mu_1, t) d\mu_1, \\ \psi(\mu, 0) &\geq 0, \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{7.83}$$

где функция  $G(\mu, \mu_1, t) \geq 0$  является непрерывной по совокупности аргументов. Покажем, что непрерывная гладкая по  $t$  функция  $\psi$ , удовлетворяющая этому неравенству, обязательно неотрицательная, что завершит доказательство.

Рассмотрим непрерывную функцию  $\bar{\psi}$ , определенную следующим соотношением:

$$\frac{\partial \bar{\psi}(\mu, t)}{\partial t} = \int_0^\mu G(\mu, \mu_1, t) \bar{\psi}(\mu_1, t) d\mu_1, \quad \bar{\psi}(\mu, 0) \geq 0, \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+,$$

которое эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра

$$\bar{\psi}(\mu, t) = \bar{\psi}|_{t=0} + \int_0^t \int_0^\mu G(\mu, \mu_1, \tau) \bar{\psi}(\mu_1, \tau) d\mu_1 d\tau \stackrel{\text{def}}{=} A(\bar{\psi}),$$

$$\bar{\psi}(\mu, 0) \geq 0, \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+.$$

Применяя метод последовательных приближений

$$\psi^{(k)} = A(\psi^{(k+1)}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \psi^{(0)} = 0,$$

устанавливаем, что

$$\bar{\psi}(\mu, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi^{(k)}(\mu, t),$$

а поскольку  $\psi^{(k)} \geq 0$ , то функция  $\bar{\psi} \geq 0$ . Покажем, что непрерывная функция  $\psi$ , подчиняющаяся неравенству (7.83), удовлетворяет неравенству  $\psi \geq \bar{\psi}$ , если  $\psi(\mu, 0) \geq \bar{\psi}(\mu, 0)$ . Для этого перейдем к интегральной форме неравенства (7.83), полагая  $\psi(\mu, 0) = \bar{\psi}(\mu, 0) \geq 0$ :

$$\psi(\mu, t) \geq \psi|_{t=0} + \int_0^t \int_0^\mu G(\mu, \mu_1, \tau) \psi(\mu_1, \tau) d\mu_1 d\tau = A(\psi), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+.$$

Поскольку оператор  $A$  монотонный ( $A(\psi_1) \geq A(\psi_2)$ , если  $\psi_1 \geq \psi_2$ ), то в силу последнего неравенства

$$\psi \geq A^n(\psi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку  $A^n(\psi) \rightarrow \bar{\psi}$  при  $n \rightarrow \infty$ , то справедливо неравенство  $\psi \geq \bar{\psi}$ , которое доказывает утверждение индукции. Лемма доказана.  $\blacksquare$

**Лемма 7.11.** Пусть  $F_n(p, t)$  — вещественное преобразование Лапласа функции  $\varphi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определенной в лемме 7.60. Тогда при любом номере  $n \in \mathbb{N}$  имеет место неравенство

$$F_n(p, t) \leq F(p, t), \quad p, t \in \mathbb{R}^+,$$

где функция  $F$  — гладкое решение задачи Коши

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} + [F(p, t) - m(t)] \frac{\partial F(p, t)}{\partial p} = 0, \quad p > 0, \quad t > 0,$$

$$m(t) = F(0, t),$$

$$F|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu) \varphi^{(0)}(\mu) d\mu, \quad p \geq 0, \quad (7.84)$$

$$\mu^{-1} \varphi^{(0)} \in \mathcal{E}_0^+.$$

□ Построение решения задачи (7.84) методом характеристик рассмотрено выше в § 2. Поэтому перейдем к установлению справедливости неравенства  $F_n(p, t) \leq F(p, t)$ ,  $n \geq 0$ ,  $p, t \in \mathbb{R}^+$ . Обозначим  $\Delta_n = F - F_n$ . Имеет место тождество

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_{n+1}(p, t)}{\partial t} + [F(p, t) - m(t)] \frac{\partial \Delta_{n+1}(p, t)}{\partial p} = \\ & = -\Delta_n(p, t) \frac{\partial F_{n+1}(p, t)}{\partial p}, \quad p > 0, \quad t > 0, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $F_0 \equiv 0$ , а функция  $F$  неотрицательна в силу формулы (7.81), то  $\Delta_0 \geq 0$ . Доказательство проведем индукцией по номеру  $n \geq 0$ . Если  $\Delta_n \geq 0$ , то в силу монотонного убывания функции  $F_{n+1}(p, t)$  по аргументу  $p \in \mathbb{R}^+$ , имеем

$$\frac{d\Delta_{n+1}(p(t), t)}{dt} = - \left[ \Delta_n(p, t) \frac{\partial F_{n+1}(p, t)}{\partial p} \right]_{|_{(p(t), t)}} \geq 0,$$

где  $p(t)$  — характеристика (7.76) для уравнения (7.84). Поскольку  $\Delta_{n+1}(p, 0) = 0$ , то на каждой характеристике  $\Delta_{n+1}(p, t) \geq 0$ , и, значит, всюду  $F \geq F_{n+1}$ . Лемма доказана. ■

**Следствие 7.2.** Функции  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ , определенные в лемме 7.10, удовлетворяют неравенству

$$\int_0^\infty \varphi_n(\mu, t) d\mu \leq m(t), \quad t \geq 0, \quad n \geq 0, \quad (7.85)$$

где  $m(t) = F(0, t)$ .

**Лемма 7.12 (принцип максимума).** На каждом отрезке  $0 \leq \mu \leq a$  выполняется неравенство

$$\max_{0 \leq \mu \leq a} \varphi_n(\mu, t) \leq \max_{0 \leq \mu \leq a} \varphi^{(0)}(\mu), \quad n \geq 0.$$

□ Фиксируем произвольное значение  $t > 0$ . Пусть в точке  $\bar{\mu}$ , лежащей в отрезке  $0 \leq \mu \leq a$ , справедливо соотношение

$$\varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) = \max_{0 \leq \mu \leq a} \varphi_{n+1}(\mu, t).$$

Тогда в указанной точке

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t)}{\partial t} &= \int_0^{\bar{\mu}} \mu_1 \varphi_n(\bar{\mu} - \mu_1, t) \varphi_{n+1}(\mu_1, t) d\mu_1 - \bar{\mu} \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) m(t) \leq \\ &\leq \bar{\mu} \left[ \int_0^{\bar{\mu}} \varphi_n(\bar{\mu} - \mu_1, t) \varphi_{n+1}(\mu_1, t) d\mu_1 - \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) m(t) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку операция свертки симметричная, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t)}{\partial t} &\leq \bar{\mu} \left[ \int_0^{\bar{\mu}} \varphi_{n+1}(\bar{\mu} - \mu_1, t) \varphi_n(\mu_1, t) d\mu_1 - \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) m(t) \right] \leq \\ &\leq \bar{\mu} \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) \left[ \int_0^{\bar{\mu}} \varphi_n(\mu_1, t) d\mu_1 - m(t) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (7.85) из следствия 7.2, имеем

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t)}{\partial t} \leq 0.$$

В силу принципа максимума (теорема 10.14) получаем утверждение леммы. Лемма доказана. ■

### Доказательство теоремы 7.3

□ В силу лемм 7.10 и 7.12 последовательность функций  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ , монотонно возрастающая, сходится к пределу  $\varphi(\mu, t)$ . Перепишем задачу Коши для уравнения (7.74) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(\mu, t) = \varphi^{(0)}(\mu) + \int_0^t \left[ \int_0^{\mu} \mu_1 \varphi_n(\mu - \mu_1, \tau) \varphi_{n+1}(\mu_1, \tau) d\mu_1 - \right. \\ \left. - \mu \varphi_{n+1}(\mu, \tau) m(\tau) \right] d\tau, \quad \mu, t \geq 0, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Основываясь на теореме Лебега [94] о предельном переходе под знаком интеграла, устремим  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, t) = \varphi^{(0)}(\mu) + \\ + \int_0^t \left[ \int_0^{\mu} \mu_1 \varphi(\mu - \mu_1, \tau) \varphi(\mu_1, \tau) - \mu \varphi(\mu, \tau) m(\tau) \right] d\tau d\mu_1, \quad (7.86) \\ \mu, t \geq 0, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение

$$\int_0^{\mu} \mu_1 \varphi(\mu - \mu_1, \tau) \varphi(\mu_1, \tau) d\mu_1 \equiv \frac{\mu}{2} \int_0^{\mu} \varphi(\mu - \mu_1, \tau) \varphi(\mu_1, \tau) d\mu_1,$$

устанавливаем, что построенная функция  $\varphi$  удовлетворяет интегральной форме задачи (7.74). Следовательно, функция  $f = \mu^{-1} \varphi$  является решением задачи (7.60) в интегральной форме.

Единственность решения уравнения (7.86) устанавливается аналогично доказательству единственности для интегрального уравнения Вольтерра [94].

Отметим, что измеримая ограниченная функция  $\varphi$ , удовлетворяющая соотношению (7.86), является непрерывной, если непрерывна функция  $\varphi^{(0)}$ . Действительно, для модуля непрерывности функции  $\varphi$  по аргументу  $\mu$

$$\omega(\varepsilon, t) = \sup_{|\mu - \mu_1| \leq \varepsilon} |\varphi(\mu, t) - \varphi(\mu_1, t)|$$

получаем неравенство

$$\omega(\varepsilon, t) \leq \omega(\varepsilon, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon) + C \int_0^t \omega(\varepsilon, \tau) d\tau, \quad \varepsilon > 0, \quad t \geq 0,$$

с некоторой постоянной  $C$ , откуда следует неравенство

$$\omega(\varepsilon, t) \leq [\omega(\varepsilon, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon)] \exp(CT), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.87)$$

В силу ограниченности функции  $\varphi$  из (7.86) получаем оценку

$$\sup_{\mu \in [0, M]} |\varphi(\mu, t_1) - \varphi(\mu, t_2)| \leq C_1 |t_1 - t_2|, \quad (7.88)$$

где постоянная  $C_1$  зависит от  $M$ ,  $T$ ,  $\sup \varphi$ . Сочетая соотношения (7.87), (7.88), убеждаемся в непрерывности функции  $\varphi$ . Таким образом, для функции  $\varphi$  справедливо дифференциальное тождество

$$\frac{\partial \varphi(\mu, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \varphi * \varphi|_{(\mu, t)} - \mu \varphi(\mu, t) m(t), \quad \mu, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Повторяя рассуждения из § 3 для решения уравнения (7.74), устанавливаем, что вещественное преобразование Лапласа для функции  $\varphi$ , которое задается формулой

$$F(p, t) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu) \varphi(\mu, t) d\mu, \quad p \geq 0, \quad t \geq 0,$$

удовлетворяет соотношениям (7.76), (7.81). Поскольку  $F(0, t)$  определяется значением начальной функции  $F_0$ , переносимым вдоль характеристики до пересечения с осью  $p = 0$ ,  $t \geq 0$ , то

$$F(0, t) \equiv m(t),$$



т. е. справедливо тождество

$$\int_0^{\infty} \varphi(\mu, t) d\mu \equiv m(t), \quad t \geq 0.$$

Теорема доказана. ■

### § 17. СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ СМОЛУХОВСКОГО С ИСТОЧНИКОМ ЧАСТИЦ

В связи с рассмотренным выше явлением перехода соотношения сохранения в соотношение диссипации представляет интерес изучение решений стационарной задачи (7.61), которая в случае коагуляции непрерывных масс записывается в виде [29]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\mu} \Phi(\mu - \mu_1, \mu_1) f(\mu - \mu_1) f(\mu_1) d\mu_1 - \\ & - f(\mu) \int_0^{\infty} \Phi(\mu, \mu_1) f(\mu_1) d\mu_1 + q(\mu) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (7.89)$$

где неотрицательная величина  $q(\mu)$  определяет интенсивность, с которой частицы массы  $\mu \geq 0$  вводятся в коагулирующую систему. Отметим, что решения уравнения (7.89) автоматически должны удовлетворять требованию

$$S(f) = -q < 0,$$

если  $q > 0$ , где  $S$  — оператор столкновений коагуляции (1.8). Ясно, что такие решения не принадлежат множеству консервативности оператора столкновений, а лежат во множестве диссипативности в силу неотрицательности источника.

Такого рода задачи возникают при описании роста пор в металлах при облучении потоком быстрых нейтронов, которые, выбивая атомы из кристаллической решетки, служат причиной возникновения пор. При описании работы реактивных двигателей приходится учитывать коагуляцию слипающихся частичек, которые возникают в процессе горения топлива, т. е. здесь источником коагулирующих частиц является химическая реакция, протекающая во внешней среде.

В настоящем разделе рассматривается вопрос о построении решения уравнения коагуляции (7.89) в частном случае, когда ядро  $\Phi$

имеет мультипликативное представление

$$\Phi(\mu, \mu_1) = \alpha(\mu)\alpha(\mu_1), \quad \alpha(\mu) > 0, \quad \mu, \mu_1 \in \mathbb{R}^+.$$

Сразу подчеркнем, что в случае мультипликативной функции  $\Phi$  следующая замена независимой переменной

$$\alpha f \mapsto f$$

приводит уравнение (7.89) к стандартному виду:

$$\frac{1}{2}(f * f)(\mu) - f(\mu) \int_0^\infty f(\mu_1) d\mu_1 + q(\mu) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}^+, \quad (7.90)$$

где символ  $*$  означает свертку. Очевидно, вопрос о построении решения интегрального уравнения (7.90) связан с определением величины интеграла  $\int_0^\infty f(\mu_1) d\mu_1$ . Если функция  $f$  удовлетворяет уравнению (7.90), то непосредственным интегрированием по  $\mu \in \mathbb{R}^+$  получаем

$$\int_0^\infty f(\mu_1) d\mu_1 = \left\{ 2 \int_0^\infty q(\mu) d\mu \right\}^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} Q,$$

если считать заданную функцию  $q \geq 0$  суммируемой на  $\mathbb{R}^+$ . Для построения решения уравнения (7.90) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{1}{2}\varphi * \varphi - Q\varphi + q = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}^+. \quad (7.91)$$

**Лемма 7.13.** При любой суммируемой неотрицательной функции  $q \neq 0$  на  $\mathbb{R}^+$  решение задачи (7.91) может быть найдено как предел в метрике пространства  $L^1_{[0, \infty]}$  при  $n \rightarrow \infty$  монотонно возрастающей последовательности функций  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ , где

$$\begin{cases} \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, \\ \varphi_0 = 0, \\ \varphi_{n+1} = Q^{-1} \left[ \frac{1}{2}\varphi_n * \varphi_n + q \right], \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (7.92)$$

при условии, что величина  $Q$  положительна.

□ В силу неотрицательности  $q$  и положительности  $Q$  последовательность функций  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$  является монотонно возрастающей, ибо для неотрицательных функций  $\varphi$  оператор, определенный правой

частью соотношения (7.92), монотонно возрастающий. Таким образом, справедливы соотношения

$$\varphi_n \geq 0, \quad \varphi_n \in L^1_{[0, \infty)}, \quad n \geq 0.$$

Обозначим

$$y_n = \int_0^{\infty} \varphi_n d\mu, \quad n \geq 0.$$

Из соотношения (7.92) получаем

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}Q^{-1} [y_n^2 + Q^2], \quad n \geq 0, \quad y_0 = 0. \quad (7.93)$$

Покажем, что при каждом номере  $n \geq 0$  справедливо неравенство

$$y_n \leq Q.$$

Действительно, величина  $Q > 0$  является единственным корнем квадратного уравнения

$$y^2 - 2Qy + Q^2 = 0. \quad (7.94)$$

Обозначим  $z_n = Q - y_n$  и, воспользовавшись равенством

$$Q = (Q^2 + Q^2)(2Q)^{-1},$$

имеем

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}Q^{-1}z_n [Q + y_n], \quad n \geq 0.$$

Поскольку  $y_n \geq 0$ ,  $Q > 0$ ,  $z_0 > 0$ , то при каждом номере  $n \geq 0$  величины  $z_n$  неотрицательны. Следовательно, выполняется неравенство

$$y_n \leq Q, \quad n \geq 0.$$

Применяя теорему Б. Леви [94] о предельном переходе под знаком интеграла, устремляя  $n \rightarrow \infty$  в соотношении (7.92), получаем утверждение леммы. Лемма доказана. ■

**Замечание 7.12.** В случае  $Q = 0$  почти везде функция  $q = 0$  и, значит, уравнение (7.91) имеет единственное решение  $f = 0$  в классе неотрицательных функций (с точностью до эквивалентности на множестве меры нуль).

**Теорема 7.5.** Пусть функция  $q$  неотрицательная суммируемая на  $\mathbb{R}^+$ . Тогда уравнение (7.90) имеет неотрицательное суммируемое решение  $f$ , являющееся пределом монотонно возрастающих итераций (7.92) при  $Q > 0$ , и решение  $f = 0$  при  $Q = 0$ . Это решение единственное с точностью до эквивалентности в пространстве  $L^1_{[0, \infty)}$ .

□ Для доказательства достаточно убедиться, что для функции

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$$

интеграл на  $\mathbb{R}^+$  равен  $Q$ . В силу теоремы Б. Леви [94] справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi_n d\mu = \int_0^{\infty} \varphi d\mu.$$

Следовательно, достаточно установить равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Q,$$

где величины  $\{y_n\}$  определены соотношениями (7.93). Очевидно, монотонно возрастающая ограниченная последовательность  $\{y_n\}$  имеет предел, который обозначим  $y$ . Но этот предел совпадает с единственным корнем уравнения (7.94), который равен  $Q$ . Значит,  $y = Q$  и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} \varphi d\mu = Q.$$

Итак, решение вспомогательной задачи (7.91) является решением задачи (7.90). Единственность решения вытекает из единственности решения задачи (7.91). Теорема доказана. ■

**Замечание 7.13.** Если в условии теоремы 5.5 дополнительно потребовать непрерывность функции  $q$ , то таким же свойством обладает решение уравнения (7.90).

**Замечание 7.14.** Построенное решение уравнения (7.90) является пределом при  $t \rightarrow \infty$  решения следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial f(\mu, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^{\mu} f(\mu - \mu_1, t) f(\mu_1, t) d\mu_1 - f(\mu, t) \int_0^{\infty} f(\mu_1, t) d\mu_1 + q(\mu),$$

$$f(\mu, 0) = f_0(\mu) \geq 0, \quad t > 0, \quad \mu \geq 0,$$

где  $f_0$  — произвольная суммируемая неотрицательная функция на множестве  $\mathbb{R}^+$ .

**Замечание 7.15.** Вопрос об устойчивости стационарного решения для нестационарной задачи в общем случае не решен. Можно показать, что для ядра  $\Phi$ , равного положительной постоянной, устойчивость имеет место. Если порядок роста ядра на бесконечности равен единице, т. е.  $\Phi(\mu, \cdot) \sim \mu$  при  $\mu \rightarrow \infty$ , то стационарное решение неустойчиво, ибо решение нестационарной задачи притягивается к нулю. Тожественный нуль, естественно, не удовлетворяет стационарной задаче с ненулевым источником.

**Замечание 7.16.** Если предположить разрешимость (в классическом смысле) кинетического уравнения коагуляции при наличии стационарного источника в случае ядер с порядком роста на бесконечности большим единицы, то решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями может быть периодическим по времени, ибо в силу оценок из [4] это решение за конечное время обращается в нуль. Однако вопрос о классических решениях пространственно однородной задачи Коши для уравнения Смолуховского с такими ядрами не изучен.

Функциональные решения для произвольных неотрицательных симметричных ядер построены в целом в гл. 3.

**Замечание 7.17.** Решение стационарного уравнения в случае дискретной коагуляции

$$[S(f)]_i + q_i = 0$$

с неотрицательной функцией  $q$  может быть построено для ряда симметричных положительных ядер  $\Phi$  на основе теоремы Брауэра [127] о неподвижных точках непрерывных преобразований конечномерного симплекса, если рассматривается задача при  $1 \leq i \leq N$ , [45].

Действительно, пусть  $\Phi_{i,j} = \Phi_{j,i} > 0$ ,  $q_i \geq 0$ , и рассмотрим уравнение

$$F_N(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_{i-j,j} u_{i-j} u_j - u_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j} u_j + q_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Гладкое векторное поле  $F_N$  на  $\mathbb{R}_N$  таково, что его  $i$ -я компонента неотрицательна при  $u_i = 0$ ,  $u \in \mathbb{R}_N^+$ , и справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^N F_N \leq \frac{1}{2} \min_{1 \leq i,j \leq N} \Phi_{i,j} \left( \sum_{i=1}^N u_i \right)^2 + \sum_{j=1}^N q_j.$$

Таким образом, векторное поле  $F_N$  направлено внутрь симплекса

$$C_N = \left\{ u \in \mathbb{R}_N^+ : \sum_{i=1}^N u_i \leq \left[ \left( 2 \sum_{j=1}^N q_j \left( \min_{1 \leq i,j \leq N} \Phi_{i,j} \right)^{-1} \right) \right]^{1/2} \right\}$$

на его границе. Следовательно, по теореме Брауэра существует по крайней мере одна точка в  $C_N$ , в которой  $F_N(u) = 0$ .

В бесконечномерном случае решение не является финитной функцией, поскольку наличие свойства сохранения обеспечивает для финитных функций равенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} j[S(f)]_i = 0, \quad (7.95)$$

которое не выполняется на решении задачи с источником.

**Замечание 7.18.** Наличие решений стационарного уравнения Смолуховского при действии источника обусловлено отсутствием непрерывности оператора столкновений коагуляции относительно нормы, определяемой соотношения сохранения, ибо множество финитных функций всюду плотное в этом нормированном пространстве. Но равенство (7.95), выполняющееся для финитных функций, не имеет места для решений уравнения

$$S(f) + q = 0$$

при положительном  $q$ .

**Замечание 7.19.** Наличие особенности ядра  $\Phi$  в окрестности  $\mu, \mu_1 = 0$  для коагуляции непрерывных масс может обусловить существование стационарного положительного решения при нулевом источнике. Пример такой ситуации дает ядро

$$\Phi(\mu, \mu_1) = \alpha(\mu)\alpha(\mu_1)(\mu + \mu_1)^{-3}, \quad \mu, \mu_1 > 0, \quad \alpha > 0,$$

которому соответствует решение

$$f(\mu) \equiv \alpha^{-1}(\mu), \quad \mu > 0, \quad \alpha > 0,$$

для уравнения

$$S(f) = 0.$$

(Доказательство этого утверждения приведено в замечании 3.4.)

**Замечание 7.20.** Результаты теоремы 7.5 и замечания 7.15 дают возможность построения явных решений уравнения Смолуховского (1.1<sub>0</sub>), (1.8), обладающих свойством автомодельности, монотонно убывающих по времени. На этих решениях первый момент не сохраняется, а монотонно убывает.

Действительно, рассмотрим решение уравнения Смолуховского (1.1<sub>0</sub>), (1.8) в виде

$$f(x, t) = q(x)(t + 1)^{-1}, \quad x, \quad t \geq 0, \quad (7.96)$$

где  $q(x) > 0$  при  $x \geq 0$  и удовлетворяет условиям теоремы 7.5. Подставляя равенство (7.96) в соотношения (1.1<sub>0</sub>), (1.8), получаем, что функция  $q$  необходимо должна удовлетворять уравнению

$$[q, q]_{\Phi} + q = 0, \quad x \geq 0, \quad (7.97)$$

где оператор  $[\cdot, \cdot]_{\Phi}$  определен формулой (7.1). При заданном положительном  $q$  найдем симметричные неотрицательные ядра  $\Phi$ , для которых (7.97) обращается в тождество, т. е. решаем обратную задачу. Рассмотрим ее решение в классе мультипликативных ядер, полагая

$$\Phi(x, y) = \alpha(x)\alpha(y), \quad x, y \geq 0. \quad (7.98)$$

Обозначим

$$f(x) = \alpha(x)q(x), \quad x \geq 0, \quad (7.99)$$

и подставим соотношение (7.39) в формулу (7.37), выражая величины  $\alpha$  и  $q$  в операторе  $[\cdot, \cdot]_{\Phi}$  через неизвестную функцию  $f$ . Тем самым получаем уравнение

$$[f, f]_1 + q = 0, \quad x \geq 0, \quad (7.100)$$

которое совпадает с уравнением (7.31), исследованным в теореме 7.5. Следовательно, для рассматриваемых положительных функций  $q$  существует единственное положительное решение уравнения (7.40)  $f$  и, значит, ядро  $\Phi$  отыскивается по формулам (7.38), (7.39).

Класс построенных мультипликативных ядер можно расширить за счет замечания 7.17, добавляя к мультипликативному ядру функцию

$$\bar{\Phi}(x, y) = \frac{1}{q(x)q(y)(x+y)^3}, \quad x, y > 0,$$

поскольку справедливо тождество

$$[q, q]_{\bar{\Phi}} = 0, \quad x > 0,$$

и, соответственно,

$$[q, q]_{\bar{\Phi} + \Phi} + q = 0, \quad x > 0.$$

Весьма интересной проблемой является проведение прямого моделирования стационарных процессов коагуляции, приводящих к такому уравнению.

# СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

## § 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Введем следующие обозначения. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}_n$  — открытая область, ограничения на которую будут накладываться по мере надобности.

Обозначим

$$W = \left\{ u \in \overset{\circ}{C}^\infty(\Omega) : \operatorname{div} u = 0 \right\};$$

$V$  — пополнение множества  $W$  по норме пространства  $W^\circ \frac{1}{2}(\Omega)$ ;

$H$  — пополнение множества  $W$  по норме пространства  $L_2(\Omega)$ ;

$\hat{V}$  — пополнение множества  $W$  по норме пространства  $W_2^1(\Omega) \cap L_n(\Omega)$ .

Отметим, что в силу теорем вложения Соболева [157]  $V = \hat{V}$  при  $n \leq 4$ . Пространство  $H$  снабжено скалярным произведением, индуцированным из пространства  $L_2(\Omega)$ . Пространство  $V$  — гильбертово со скалярным произведением

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n (D_i u_i D_i v); \quad | = \sqrt{(\cdot, \cdot)}, \quad \|\cdot\| = \sqrt{((\cdot, \cdot))},$$

пространство  $V$  вложено в  $H$  и плотно в нем, причем вложение непрерывно. Пусть  $H'$  и  $V'$  обозначают пространства, сопряженные к  $H$  и  $V$ ;  $i$  — оператор вложения  $V$  в  $H$ . Сопряженный оператор  $i'$  является непрерывным оператором из  $H'$  в  $V'$ , который взаимно однозначен, так как  $i(v) = V$ ; поэтому  $H'$  может быть отождествлено с некоторым плотным подпространством в  $V'$ . Отождествляя далее по теореме Рисса  $H'$  и  $H$ , приходим к включениям

$$V \subset H \equiv H' \subset V',$$

где каждое пространство плотно в следующем; вложения непрерывны. В силу указанных отождествлений скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$  элементов  $f \in H$  и  $u \in V$  совпадает со значением функционала  $f$  на элементе  $u$  в силу двойственности между пространствами  $V$  и  $V'$ :

$$\langle f, u \rangle = (f, u), \quad \forall f \in H, \quad \forall u \in V.$$



Для любого  $u \in V$  форма

$$v \in V \rightarrow ((u, v)) \in \mathbb{R},$$

линейна и непрерывна на  $V$ ; следовательно, существует элемент из  $V'$ , который обозначим  $Au$ , такой что

$$\langle Au, v \rangle = (u, v).$$

Положим

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx.$$

**Лемма 8.1.** Для произвольной открытой области  $\Omega$  форма  $\sigma$  трилинейна и непрерывна на  $V \times V \times \hat{V}$ . Если  $n \leq 4$ , то  $\sigma$  — трилинейная непрерывная форма на  $V \times V \times V$ .

Доказательство леммы 8.1 содержится в [157]. Отметим два важнейших свойства формы  $\sigma$ , которые часто будут использоваться в дальнейшем изложении [157]:

Для любой открытой области  $\Omega$

$$\sigma(u, v, v) = 0, \quad \forall u \in V, \quad v \in W^{\circ 1}_2(\Omega) \cap L_n(\Omega), \quad (8.1)$$

$$\sigma(u, v, w) = -\sigma(u, w, v) = 0, \quad \forall u \in V, \quad v, w \in W^{\circ 1}_2(\Omega) \cap L_n(\Omega). \quad (8.2)$$

Для  $u, v \in V$  обозначим  $B(u, v)$  элемент из  $V'$ , определяемый равенством

$$\langle B(u, v), w \rangle = \sigma(u, v, w), \quad \forall w \in V,$$

и положим

$$B(u) = B(u, u) \in V', \quad \forall u \in V.$$

## § 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. МЕТОД ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ

Следуя гл. 2, изложим здесь некоторые аспекты теории функциональных решений уравнений несжимаемой жидкости, которые понадобятся в дальнейшем изложении.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$u_t + \sum_{i=1}^n u_i u_{x_i} + \text{grad } p = \nu \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}, \quad (8.3)$$

$$\text{div } u = 0, \quad (8.4)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad (8.5)$$

$$0 < \nu < \nu_0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t \in (0, T), \quad 0 < T < \infty,$$

которая называется системой уравнений Навье—Стокса. Формально полагая в (8.1)  $\nu = 0$ , получаем систему уравнений Эйлера. Система интегральных уравнений

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}_n \times (0, T)} \left( u\varphi_t + \sum_{i=1}^n u_i u \varphi_{x_i} + \nu \sum_{i=1}^n u \varphi_{x_i x_i} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}_n} \varphi(x, 0) u^0 dx = 0, \tag{8.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}_n \times (0, T)} (u, \text{grad } \psi)_{\mathbb{R}_n} = 0, \tag{8.7}$$

$$\forall \varphi \in C^1(0, T; W), \quad \forall \psi \in (\mathbb{R}_n \times (0, T)), \quad \varphi(x, t) = 0,$$

служит для определения обобщенного решения системы уравнений (8.3)–(8.5).

Следуя методам, развитым в гл. 2, обозначим  $\mathcal{E}$  векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций вида

$$F_{\varphi, \varphi_1, \varepsilon} = u\varphi_t + \sum_{i=1}^n u_i u \varphi_{x_i} + \varepsilon \sum_{i=1}^n u \varphi_{x_i x_i} + u\varphi_1, \\ \forall \varphi \in C^1(0, T; W), \quad \forall \varphi_1 \in \{D(\mathbb{R}_n \times (0, T))\}^n, \\ \varphi(x, t) = 0, \quad u \in L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T)).$$

Для каждого  $F \in \mathcal{E}$  определим операторы  $\pi_0, \pi_1, \pi_2$  формулами

$$\pi_1(F) = F_{\varphi, 0, \varepsilon} \quad \pi_2(F) = F_{\varphi, 0, 0}, \quad \pi_0(F) = \varphi(x, 0) u^0.$$

Пусть  $\mathcal{E}^+ = \{l\}$  — пространство, алгебраически сопряженное к  $\mathcal{E}$ . На  $\mathcal{E}^+$  зададим топологию  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  посредством системы полуноrm  $\{p_F(l)\}_{F \in \mathcal{E}}$ , где

$$p_F(l) = |l(F)|, \quad \forall l \in \mathcal{E}^+, \quad F \in \mathcal{E};$$

топологическое пространство  $\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  локально выпуклое, хаусдорфово.

Рассмотрим вложение  $L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T))$  в пространство  $\mathcal{E}^+, \delta(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ , которое определим формулой

$$\forall u \in L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T)): u \mapsto l_u \in E^+ \\ l_u(F) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_n \times (0, T)} F \circ u dx dt.$$

Обозначим  $L$  замыкание образа этого вложения пространства  $L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T))$  в  $\mathcal{E}^+$ ,  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ . На  $L$  индуцируем топологию  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ .

Аналогичным образом вложим пространство начальных данных  $H$  в  $\mathcal{E}_0^+$ , являющееся алгебраическим сопряжением к векторному пространству  $\mathcal{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_0 \mathcal{E}$ . При этом на  $\mathcal{E}_0^+$  введена топология  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ , а вложение осуществляется по формуле

$$u^0 \mapsto l_{u_0}^{(0)} \in \mathcal{E}_0^+,$$

$$l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_n} \pi_0(F) dx. \quad (8.8)$$

Замыкание образа вложения пространства  $H$  в  $E_0^+$ , снабженное индуцированной топологией  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ , обозначим  $L_0$ . Если функция

$$u \in L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T))$$

является обобщенным решением задачи (8.3)–(8.5), то выполнено соотношение

$$l_u(\pi_1(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (8.9)$$

**Определение 8.1.** Элемент  $l \in L$  назовем функциональным решением задачи (8.3)–(8.5) с начальным условием  $u^0 \in H$ , если для любого  $F \in \mathcal{E}$  справедливо равенство

$$l(\pi_1(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (8.10)$$

**Определение 8.2.** Элемент  $l \in L$  назовем функциональным решением задачи (8.3)–(8.5) при  $v = 0$ , с начальным условием  $u^0 \in H$ , если для любого  $F \in \mathcal{E}$  справедливо равенство

$$l(\pi_2(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (8.11)$$

В дальнейшем вместо задачи (8.3)–(8.5) ((8.3)–(8.5) при  $v = 0$ ) будем рассматривать задачу (8.10) ((8.11) относительно неизвестной  $l \in L$ ).

Будем говорить, что задан приближенный метод решения задачи (8.10) (или (8.11)), обозначаемый  $\mathcal{AM}$ , если указан выбор параметрического семейства элементов в пространстве  $L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T))$ :

$$\alpha \mapsto u_\alpha \in L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T)), \alpha \in A.$$

Приближенный метод  $\mathcal{AM}$  назовем регулярным, если выбор параметрического семейства  $\{\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}\}$  сделан на основе решения семейства уравнений, заменяющих (8.6),

$$J_\alpha(u_\alpha) = 0, \quad \alpha \in A,$$

и область определения семейства операторов  $\{J_\alpha(u_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  содержит множество

$$V \in L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T)),$$

плотное в топологии  $L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T))$  во множестве определения

$$U(V \subset U \subset L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T)))$$

оператора  $J$  из уравнения (8.6). Предполагается, что существует такая последовательность параметров  $\{\alpha_n \in A\}_{n=1}^\infty$ , что для каждого  $v \in V$  справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\alpha_n}(v) = J(v)$$

всюду на множестве  $\mathbb{R}_n \times (0, T)$ . Ниже вместо термина «регулярный метод» иногда будем пользоваться термином «метод» (там, где это не вызовет недоразумений), а указанное семейство  $\{J_\alpha(u_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  назовем деформацией оператора  $J$ .

**Определение 8.3.** Функциональное решение назовем регулярным, если оно является пределом последовательности аппроксимаций, задаваемых регулярным методом.

**Определение 8.4.** Регулярный метод  $\mathcal{AM}$  слабо аппроксимирует задачу (8.10) ((8.11)), если можно указать последовательность

$$u_{\alpha_n} \in L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T)), \quad n \in \mathbb{N},$$

для которой значения невязки

$$\begin{aligned} \delta_n(F) \stackrel{\text{def}}{=} & |l_{u_{\alpha_n}}(\pi_{1(2)}(F)) + l_{u_{\alpha_n}}^{(0)}|_{t=0}(\pi_0(F))| + \\ & + |l_{u_{\alpha_n}}^{(0)}|_{t=0}(\pi_0(F)) - l_{u^0}^{(0)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

стремятся к нулю при каждом  $F \in \mathcal{E}$ . При этом соответствующие значения операторов  $J_{\alpha_n}(v)$  предполагаются сходящимися при  $n \rightarrow \infty$  к значениям оператора  $J(v)$ , определенного соотношениями (8.6), при любых  $v \in V$ .

**Определение 8.5.** Метод  $\mathcal{AM}$  слабо сходится, если существует сходящаяся в  $L$ ,  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  последовательность  $l_{u_{\alpha_n}}$ , пределом которой является функциональное решение задачи (8.10) ((8.11)).

**Определение 8.6.** Метод  $\mathcal{AM}$  слабо устойчивый, если

$$\sup_{\alpha \in A} \left| \int_{\mathbb{R}_n \times (0, T)} u_\alpha \varphi \, dx \, dt \right| < \infty, \quad \forall \varphi \in \{D(\mathbb{R}_n \times (0, T))\}^n. \quad (8.12)$$

**Теорема 8.1.** Пусть регулярный метод АМ слабо аппроксимирует задачу (8.10) ((8.11)) и является слабо устойчивым. Тогда он слабо сходится к регулярному функциональному решению задачи (8.10) ((8.11)).

Доказательство теоремы 8.1. аналогично доказательству соответствующего утверждения из гл. 2 и потому здесь опускается.

**Замечание 8.1.** Пусть  $l \in L$  — регулярное функциональное решение задачи (8.10) ((8.11)). Тогда существует некоторая функция из пространства  $L_2(\mathbb{R}_n \times (0, T))$  такая, что

$$l = \int_{\mathbb{R}_n \times (0, T)} u \varphi_1 dx dt - \int_{\mathbb{R}_n} \pi_0(F) dx \quad \forall \varphi \in \{D(\mathbb{R}_n \times (0, T))\}^n. \quad (8.13)$$

В качестве иллюстрации теории функциональных решений для уравнений несжимаемой жидкости, изложенной выше, докажем слабую сходимость метода исчезающей вязкости для уравнения Эйлера. Заметим, что обоснование данного метода в рамках классической теории обобщенных решений и теории мерозначных решений [201] наталкивается на значительные трудности. Одновременно будет доказано существование глобальных функциональных решений уравнения Эйлера.

Опишем кратко суть метода исчезающей вязкости. Решение задачи (8.3)–(8.5) при  $\nu = 0$  строится как предел последовательности решений задачи (8.3)–(8.5), если  $\nu \rightarrow 0$ .

**Предложение 8.1.** Пусть для любого  $\nu > 0$  решение задачи (8.3)–(8.5)  $u_\nu$  удовлетворяет оценке

$$\sup_{\nu > 0} \int_K u_\nu^2 dx dt < \infty, \quad (8.14)$$

на каждом компакте  $K \subset \mathbb{R}_n \times (0, T)$  (требование локальной ограниченности кинетической энергии). Тогда метод исчезающей вязкости для системы уравнений Эйлера слабо сходится. Существует регулярное функциональное решение задачи (8.3)–(8.5) при  $\nu = 0$ .

□ Предварительно заметим, что оценка (8.5) имеет место для решений уравнений Навье—Стокса для любой размерности пространственных переменных  $n$  [157]. Применяя последовательно к (8.14) неравенство Коши—Буняковского и теорему Банаха—Штейнгауза 10.13, приходим к тому, что выбранный метод слабо устойчив.

Запишем выражение для невязки выбранного метода:

$$\delta = \left| \int_{\mathbb{R}_n \times (0, T)} \left[ u_\nu \varphi \psi' + \sum_{i=1}^n u_{i\nu} u_\nu \varphi_{x_i} \psi \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}_n} u_\nu(0) \varphi \psi(0) dx \right|,$$

$$\forall \psi(t) \in C^\infty(0, T), \quad \psi(t) = 0, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}_n): \operatorname{div} \varphi = 0. \quad (8.15)$$

(Второе слагаемое в правой части (8.15) равно нулю в силу того, что начальная функция  $u^0$  в задачи Коши (8.3)–(8.5) для любого  $\nu > 0$  выбирается такой же, что в задаче (8.3)–(8.5) при  $\nu = 0$ .) Так как  $u$  — обобщенное решение задачи (8.3)–(8.5), то имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}_n \times (0, T)} \left( u \varphi \psi' + \sum_{i=1}^n u_i u \varphi_{x_i} \psi + \nu \sum_{i=1}^n u \varphi_{x_i x_i} \psi \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}_n} \varphi \psi(0) u^0 dx = 0, \quad (8.16)$$

$$\forall \psi(t) \in C^\infty(0, T), \quad \psi(t) = 0, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}_n): \operatorname{div} \varphi = 0.$$

Из (8.16) и (8.15) следует, что

$$\delta = \left| \int_{\mathbb{R}_n \times (0, T)} \nu \sum_{i=1}^n u \varphi_{x_i x_i} \psi dx dt \right|.$$

В силу (8.14)  $\delta \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow 0$ , и метод слабо аппроксимирует задачу (8.11). Из утверждения теоремы 8.1. следует, что предложение доказано. ■

### § 3. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

В § 2 содержится доказательство слабой сходимости метода исчезающей вязкости, и тем самым доказано существование функциональных глобальных по времени решений уравнения Эйлера. Данный пункт содержит построение такого решения методом Галёркина. Отметим, что метод Галёркина позволяет строить в процессе его реализации энергетические оценки на решение задачи.

Пусть  $\varphi_j, j = 1, \dots, \infty$  — полная система функций в пространстве

$$W = \{u \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}_n): \operatorname{div} u = 0\}.$$

Обозначим

$$Q = \mathbb{R}_n \times (0, T).$$

Приближенный метод решения задачи (8.3)–(8.5) при  $\nu = 0$  определим посредством следующих соотношений для любого  $m \geq 1$ :

$$u(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i^m(t) \varphi_i, \quad u^m = u_0^m, \quad (8.17)$$

$$\int_{\mathbb{R}_n} \left[ (u^m)' \varphi_k + \sum_{i=1}^n u_i^m u_{x_i}^m \varphi_k \right] dx = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

где  $u_0^m$  — последовательность элементов из гильбертова пространства  $H$  (см. (8.1)) такая, что  $u_0^m \rightarrow u^0$  при  $m \rightarrow \infty$  в  $H$ . Очевидно, что данный метод является регулярным в силу полноты системы базисных функций.

*Слабая устойчивость.* Умножим обе части равенства (8.17) на  $\xi_k^m(t)$  и просуммируем по  $k$  от 1 до  $m$ :

$$\int_{\mathbb{R}_n} \left[ (u^m)' u^m + \sum_{i=1}^n u_i^m u_{x_i}^m u^m \right] = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство по  $t$  от 0 до  $s$ ,  $0 < s \leq T$ ; в результате получаем для  $\forall s \in (0, T]$ :

$$|u^m(s)| \leq |u^0|.$$

Последнее неравенство, в частности, означает, что выбранный метод слабо устойчив.

*Слабая аппроксимация.* Для любой функции  $\varphi \in V$  невязка метода записывается следующим образом:

$$\delta = \left| \int_{Q(T)} \left[ u^m \varphi \psi' + \sum_{i=1}^n u_i^m u_{x_i}^m \varphi_{x_i} \psi \right] dx dt + \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}_n} u^m(0) \varphi \psi(0) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}_n} u^m(0) \varphi \psi(0) dx - \int_{\mathbb{R}_n} u^0 \varphi \psi(0) dx \right|, \quad (8.18)$$

$$\forall \psi(t) \in C^\infty(0, T), \quad \psi(T) = 0, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}_n): \operatorname{div} \varphi = 0.$$

Так как система функций  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, \infty$ , полна в пространстве  $W$ , то

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \varphi_k, \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad (8.19)$$

где ряд сходится почти всюду в  $C^2(\mathbb{R}_n)$ . Умножим обе части равенства (8.17) на  $\psi(t)$  и просуммируем по  $k$  от 1 до  $m$ ; затем вычтем полученное из (8.18). В результате проделанных операций получим соотношение

$$\begin{aligned} \delta = & \left| \int_{Q(T)} \left[ u^m \left( \varphi - \sum_{k=1}^m C_k \varphi_k \right) \psi' + \right. \right. \\ & + \sum_{i=1}^n u_i^m u^m \left( \varphi_{x_i} - \sum_{k=1}^m C_k \varphi_{k x_i} \right) \psi \Big] dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}_n} u^m(0) \left( \varphi - \sum_{k=1}^m C_k \varphi_k \right) \psi(0) dx \Big| + \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}_n} u^m(0) \varphi \psi(0) dx - \int_{\mathbb{R}_n} u^0 \varphi \psi(0) dx \right|. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Первое слагаемое в (8.20) стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$  в силу соотношения (8.19), а второе в силу выбора последовательности  $u_0^m$ . Из теории функциональных решений для уравнений несжимаемой жидкости следует, что метод слабо сходится. Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 8.2.** Пусть задана функция  $u_0 \in H$ . Тогда существует глобальное регулярное функциональное решение задачи (8.22)–(8.24).

**Замечание 8.2.** Для построения подобных решений в случае ограниченных областей должны быть наложены дополнительные условия периодичности и непротекания на границе области. Например, при  $n = 2$ ,  $\Omega = \mathbb{R} \times [-1, 1]$  эти условия имеют следующий вид:

$$u_2(x, y, t)|_{|y|=\infty} = 0; \quad u_1(x, -1, t) = u_1(x, 1, t).$$

**Замечание 8.3.** В том случае, когда уравнение (8.3) неоднородное, т. е. имеет вид

$$u_t + \sum_{i=1}^n u_i D_i u + \nabla \varphi = f(x, t),$$

решение строится аналогично, но нетрудно показать, что энергетическая оценка имеет вид

$$|u^m(s)| \leq \exp(T) [\|f\|_{L_2(Q)} + |u^0|], \quad \forall s \in (0, T),$$

и поэтому разрешимость устанавливается лишь на конечных промежутках времени.



#### § 4. МЕТОДЫ ГАЛЁРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕАЛЬНОГО БАЗИСА В СЛУЧАЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ 2 И 3

Пусть

$$n = 2, \quad \Omega = \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right] \times [-\pi, \pi].$$

Рассмотрим систему функций  $\{\varphi_{km}\}_{k,m=0}^{\infty}$  следующего вида:

$$\varphi_{km} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2k+1} (\sin(2k+1)x + 1) \cdot \sin((2m+1)y) \\ \frac{1}{2m+1} \cos((2k+1)x) \cdot (\cos(2m+1)y + 1) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, функции  $\varphi_{km}$  для любых  $\forall k, m \in \mathbb{N}$  линейно независимы, причем

$$\operatorname{div} \varphi_{km} = 0, \quad \varphi_{km} |_{\Omega} = 0, \quad \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Обозначим  $\hat{W}$  множество всех линейных комбинаций  $\varphi_{km}$ . Пусть  $\hat{V}$  обозначает пространство, получающееся пополнением  $\hat{W}$  по норме пространства  $\hat{W}_2^1(\Omega)$ . Очевидно, пространство  $\hat{V}$  является аналогом пространства  $V$ . Таким же образом введем пространство  $\hat{H}$ , являющееся аналогом пространства  $H$ .

Рассмотрим для заданных функций  $u_0$  и  $f$  такую задачу:

$$u_0 \in \hat{H}, \quad f \in L_2(0, T; V'),$$

найти функцию  $u$ , удовлетворяющую условиям

$$u \in L_2(0, T; \hat{V}), \quad (8.21)$$

$$\frac{d}{dt}(u, v) + v((u, v)) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \forall v \in \hat{V}, \quad (8.22)$$

$$u(0) = u_0. \quad (8.23)$$

**Теорема 8.3.** *Существует регулярное и единственное решение задачи (8.21)–(8.22).*

Так как  $n = 2$ , доказательство можно провести методом, аналогичным тем, которые используются в работе [157]. Поэтому доказательство теоремы 8.3 опускается. Описанный базис может быть использован и в случае неограниченной области, если ищутся периодические по пространственным переменным решения.

Теперь рассмотрим случай, когда размерность пространственных переменных равна 3. Пусть

$$\Omega = \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right] \times [-\pi, \pi] \times [-1, 1].$$

Рассмотрим систему функций  $\{\varphi_{kml}\}$  ( $k, m = 0, 1, 2, \dots, l = 2, 3, 4, \dots$ ) следующего вида:

$$\varphi_{kml} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(2k+1)}(\sin(2k+1)x + 1) \cdot \sin((2m+1)y)(T_l'(z) - lz^{l-1}) \\ \frac{1}{(2m+1)} \cdot \cos((2k+1)x) \cdot (\cos(2m+l)y + 1)(T_l'(z) - lz^{l-1}) \\ 2 \cdot \cos((2k+1)x) \cdot \sin((2m+1)y)(T_l(z) - z^l) \end{bmatrix},$$

где  $T_l(z) = \cos(l \cdot \arccos z)$  — полиномы Чебышёва. Относительно последней системы функций мы можем провести рассуждения, аналогичные приведенным выше.

### § 5. СЛАБАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В гл. 6 доказана теорема о слабой непрерывности произведения пары функций, зависящих от двух переменных. Результаты данного раздела являются обобщением этого утверждения на случай, когда количество переменных больше двух. Некоторую модификацию этого результата мы впоследствии будем применять в теории разрешимости стационарных уравнений Навье—Стокса.

Пусть  $u$  — вещественная борелева функция на  $\mathbb{R}_n$ . Выделим компактные области в  $\mathbb{R}_n$  соотношением  $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ . Для  $\Omega \subset \mathbb{R}_n$  определим на соответствующих классах эквивалентных функций следующие нормы:

$$\|u\|_0(\Omega) = \left[ \int_{\Omega} |u|^2 dx \right]^{1/2},$$

$$\|u\|_i(\Omega) = \left[ \int_{a_i}^{b_i} \dots \left( \int_{\Omega \cap (x^i = \text{const})} |u| dx_i \right)^2 dx^i \right]^{1/2}, \quad z \leq i \leq n;$$

$$x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$a_i = \inf_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \inf_{\Omega} x_j, \quad b_i = \sup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \sup_{\Omega} x_j,$$

$$\|u\|_{\infty}(\Omega) = \text{vrai max}_{\Omega} |u|.$$

Символы  $D_i u$ ,  $i = z, \dots, n$ , присвоим обобщенным производным функции  $u$  на  $\mathbb{R}_n$  по аргументам  $x_i$  соответственно.

**Теорема 8.4.** Пусть при любом номере  $m \in \mathbb{N}$  функции  $u_m^i \in L_2^{\text{loc}}(\Omega)$  обладают обобщенными производными  $D_i u_m^i$  соответственно, при-

чем для любой области  $\Omega \in \mathbb{R}_n$  выполнено соотношение

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \{ \max_{1 \leq i \leq n} (\|u_m^i\|_\infty(\Omega), \|D_i u_m^i\|_i(\Omega)) \} < \infty. \quad (8.24)$$

Предположим, что  $u_m^i \rightarrow u^i$  при  $m \rightarrow \infty$  слабо в  $L_2(\Omega)$ ,  $\forall \Omega \subset \mathbb{R}_n$ . Тогда произведение

$$\prod_{i=1}^n u_m^i \rightarrow \prod_{i=1}^n u^i$$

при  $m \rightarrow \infty$  слабо в  $L_2(\Omega)$ ,  $\forall \Omega \subset \mathbb{R}_n$ .

Утверждение теоремы получается на основе следующей леммы.

**Лемма 8.2.** Пусть  $u_m^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , гладкие финитные функции на квадрате

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n : -\pi \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \pi\},$$

обращающиеся в нуль на границе  $\partial\Omega$ . Пусть для  $u_m^i$  выполняются условия теоремы 8.4. Тогда

$$\prod_{i=1}^n u_m^i$$

сходятся слабо в  $L_2(\Omega)$  при  $m \rightarrow \infty$  к функции

$$\prod_{i=1}^n u^i,$$

где  $u^i$  — слабые пределы в  $L_2(\Omega)$  последовательностей функций  $\{u_m^i\}_{m \in \mathbb{N}}$ .

Доказательства этой леммы и теоремы 8.4 в основном повторяют схему доказательства аналогичных утверждений для произведения двух функций, рассмотренных в гл. 6. Поэтому детальное доказательство леммы 8.2 и теоремы 8.4 мы опускаем.

## § 6. ОДНА ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА ( $N \leq 4$ )

В этом разделе доказываем существование обобщенных решений стационарных уравнений Навье—Стокса с использованием утверждения о слабой непрерывности произведения функций. В работе [157] дана классическая формулировка данной задачи: пусть

$f \in L_2(\Omega)$ , требуется найти вектор-функцию  $u$  и скалярную функцию  $\varphi$ , определенную на  $\Omega$ , удовлетворяющую следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\nu \nabla^2 u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u + \nabla \varphi = f, \quad x \in \Omega, \quad (8.25)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (8.26)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (8.27)$$

**Определение 8.7.** Функцию  $u \in V$  назовем обобщенным решением задачи (8.25)–(8.27), если она удовлетворяет следующему соотношению:

$$\nu(u, v) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (8.28)$$

**Теорема 8.5.** Пусть  $f$  — заданный элемент из  $H^{-1}(\Omega)$ , и область  $\Omega$  ограничена. Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи (8.25)–(8.37).

□ Для любого фиксированного  $m \geq 1$  определим приближенное решение  $u^m$  данной задачи с помощью соотношений

$$u^m = \sum_{i=1}^m \xi_i^m w_i, \quad \xi_i^m \in \mathbb{R}, \quad (8.29)$$

$$\nu((u^m, w_k)) + b(u^m, u^m, w_k) = \langle f, w_k \rangle, \quad k = 1, \dots, m,$$

где  $\{w_j\}_{j=1}^\infty$  — базис в пространстве  $V$ . Умножим обе части равенств (8.29) скалярно на  $\xi_k^m$  и просуммируем по  $k$  от 1 до  $m$ :

$$\nu \|u^m\|^2 + b(u^m, u^m, u^m) = \langle f, u^m \rangle.$$

Откуда в силу (8.1) имеем:

$$\nu \|u^m\|^2 = \langle f, u^m \rangle \leq \|u^m\| \|f\|_{V'}.$$

Таким образом, получаем априорную оценку

$$\nu \|u^m\| \leq \|f\|_{V'}.$$

Так как пространство  $V$  — гильбертово, то существует такая функция  $u \in V$  и такая последовательность  $u^{m'}$ ,  $m' \rightarrow \infty$ , что  $u^{m'} \rightarrow u$  при  $m' \rightarrow \infty$  слабо в  $V$ .

В силу неравенства Пуанкаре—Фридрихса имеем

$$\|u^{m'}\| \leq C_0 < \infty.$$

Откуда следует, что  $u^{m'} \rightarrow u$  при  $m' \rightarrow \infty$  слабо в  $L_2(\Omega)$ . В силу теорем вложения Соболева [151] при  $n = 2$  и  $n = 4$  выполняется

неравенство

$$\max \left[ \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u^m\|_{L_4(\Omega)}, \|u\|_{L_4(\Omega)} \right] < \infty.$$

Следовательно, для  $n = 2$  и  $n = 4$

$$u_i^m \cdot u_j^m \in L_2(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Если  $n = 3$ , то опять же в силу теорем вложения имеем

$$\max \left[ \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u^m\|_{L_6(\Omega)}, \|u\|_{L_6(\Omega)} \right] < \infty.$$

Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\left( \int_{\Omega} (u_i^m)^2 (u_j^m)^2 dx \right)^{1/2} \leq (\text{mes}(\Omega))^{1/6} \|u_i^m\|_{L_6(\Omega)} \cdot \|u_j^m\|_{L_6(\Omega)}.$$

То есть при условии что область  $\Omega$  ограничена, для  $n = 3$  получаем

$$u_i^m \cdot u_j^m \in L_2(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

По свойству (8.1),

$$b(u^m, w_k, u^m) = b((\eta^m)^{n-2} u^m, w_k, u^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b(u, w_k, u), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Предельный переход в линейных членах выполняется стандартным образом. Теорема доказана. ■

## § 7. УСЛОВНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

Рассматривается следующая задача: найти функцию  $u \in V \cap L_{\infty}(\Omega)$  такую, что

$$\nu(u, v) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V \cap L_{\infty}(\Omega). \quad (8.30)$$

**Предложение 8.2.** Пусть размерность  $n$  произвольна, и область  $\Omega$  ограничена хотя бы в одном направлении. Предположим, что существует функция  $u$  (решение задачи (8.30)) такая, что

$$\|u\|_{L_{\infty}(\Omega)} < \frac{\nu}{C(\Omega)}, \quad (8.31)$$

где  $C(\Omega)$  — константа Пуанкаре—Фридрихса. Тогда не существует других решений данной задачи, для которых выполнена априорная оценка (8.31).

□ Свойства (8.1) и (8.2), очевидно, справедливы для произвольных функций  $u, v, w$  из пространства  $V \cap L_\infty(\Omega)$ . Обозначим  $u_*$  решение задачи (8.30), удовлетворяющее оценке (8.31). Положим

$$\gamma = \|u_*\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Предположим, что существует еще какое-либо решение этой задачи, удовлетворяющее неравенству (8.31). Обозначим это решение  $u_{**}$ . Положим в соотношении (8.30), записанном для  $u_*$ ,  $v = u_*$ ,

$$v(u_*, u_*) + b(u_*, u_*, u_*) = (f, u_*),$$

откуда, учитывая (8.1), получим

$$v\|u_*\| \leq \|f\|_{v'}.$$

Пусть  $u = u_* - u_{**}$ . Тогда функция  $u$  удовлетворяет следующему соотношению:

$$v(u, v) + b(u_*, u, v) + b(u, u_*, v) = 0, \quad \forall u \in V \cap L_\infty(\Omega). \quad (8.32)$$

Полагая в (8.42)  $v = u$  и снова используя (8.1), приходим к равенству

$$\nu\|u\|^2 = -b(u, u_*, u).$$

Далее, учитывая (8.2), имеем

$$\left| \int_{\Omega} u_i (D_i u_{*j}) u_j \, dx \right| \leq \operatorname{vrai} \sup_{\Omega} |u_{*j}| \cdot |u_i| \cdot \|u_j\| \leq \gamma \cdot C(\Omega) \|u_i\| \cdot \|u_j\|.$$

Следовательно,

$$\nu\|u\|^2 \leq \gamma \cdot C(\Omega) \|u\|^2,$$

или

$$(\nu - \gamma \cdot C(\Omega)) \|u\|^2 \leq 0.$$

В силу условия предложения  $\|u\| \equiv 0$ . Предложение доказано. ■

Далее будет рассматриваться вопрос о единственности решений следующей нестационарной задачи: для заданных функций  $u_0$  и  $f$

$$u_0 \in H, \quad f \in L_2(0, T; V')$$

найти функцию  $u$ , удовлетворяющую условиям

$$u \in L_2(0, T; V \cap L_\infty(\Omega)), \quad (8.33)$$

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu(u, v) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \forall u \in V \cap L_\infty(\Omega), \quad (8.34)$$

$$u(0) = u_0. \quad (8.35)$$

**Предложение 8.3.** Предположим, что существует решение задачи (8.33)–(8.35). Тогда оно единственное.

□ Предположим, что  $u_1$  и  $u_2$  — два решения задачи (8.33)–(8.35), и пусть  $u = u_1 - u_2$ . Тогда функция  $u$  удовлетворяет условиям

$$u' + \nu Au = -Bu_1 + Bu_2, \quad (8.36)$$

$$u(0) = 0. \quad (8.37)$$

Применим обе части равенства (8.46), как элементы из  $V'$ , к функции  $u(t)$  при почти всех  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 &= \\ &= 2b(u_2(t), u_2(t), u(t)) - 2b(u_1(t), u_1(t), u(t)). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Вследствие (8.1) правая часть этого соотношения равна

$$-2b(u(t), u_2(t), u(t)).$$

Обозначим  $\gamma = \|u_*\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Далее, используя (8.2), получаем

$$\left| \int_{\Omega} u_i(D_i u_{2j}) u_j dx \right| \leq \operatorname{vrai\,sup}_{\Omega} |u_{2j}| \cdot |u_i| \cdot \|u_j\| \leq \gamma \cdot |u_i| \cdot \|u_j\|.$$

Следовательно,

$$|b(u(t), u_2(t), u(t))| \leq \gamma \cdot |u_i| \cdot \|u_j\|.$$

Подставляя полученное неравенство в (8.38), имеем

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 \leq 2\nu\|u(t)\|^2 + \frac{\gamma^2}{2\nu|u(t)|^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left\{ |u(t)|^2 \cdot \exp\left(\frac{\gamma^2}{2\nu} \cdot t\right) \right\} \leq 0.$$

Используя (8.37), получаем, что  $|u| = 0$ . Предложение доказано. ■

## § 8. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим двумерное течение несжимаемой жидкости. Следуя работе [113], будем разлагать течение на основное, устойчивость которого подлежит исследованию, и возмущенные течения. Обозначим  $U(y)$  и  $P$  первую составляющую скорости и давление основного течения соответственно. (В дальнейшем будем предполагать, что вторая составляющая скорости основного течения равна 0.) Аналогично обозначим  $u = (u', v')$  и  $p'$  скорость и давление возмущенного

течения. Следовательно, компоненты скорости результирующего течения будут иметь вид

$$\tilde{u} = U + u', \quad \tilde{v} = v', \quad (8.39)$$

а давление, соответственно,

$$\tilde{p} = P + p'. \quad (8.40)$$

Устойчивость рассматриваемого движения в основном исследуется двумя методами. Первый метод (метод малых колебаний) является основным в исследовании устойчивости ламинарных течений на сегодняшний день. Мы не будем здесь рассматривать особенности данного метода, так как большое количество специальной литературы посвящено использованию его в решении настоящей проблемы (см. [113, 181, 243]). При использовании второго (энергетического) метода определяется только изменение во времени кинетической энергии возмущений. Вопрос об устойчивости решается в зависимости от того, увеличивается или уменьшается энергия возмущенного течения с течением времени. В основном этот метод разрабатывался Лоренцем [240]. К сожалению, применение этого метода не дало значительных результатов.

Этот раздел содержит некоторые результаты, полученные энергетическим методом. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}_2$  — область, ограниченная хотя бы в одном направлении. Будем предполагать, что основное течение стационарно. Подставляя равенства (8.39), (8.40) в уравнения Навье—Стокса для двумерного нестационарного течения несжимаемой жидкости и оставляя только линейные по отношению  $u'$  и  $v'$  члены, получаем

$$u'_t + Uu'_x + v' \frac{dU}{dY} + \frac{1}{p} P_x + \frac{1}{p} p'_x = \nu \left( \frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta u' \right),$$

$$u'_t + Uv'_x + \frac{1}{p} P_y + \frac{1}{p} p'_y = \nu \Delta v',$$

$$\operatorname{div} u = 0.$$

Так как основное течение удовлетворяет уравнениям Навье—Стокса, то последняя система уравнений может быть переписана в более простой форме:

$$u'_t + Uu'_x + v' \frac{dU}{dY} + \frac{1}{p} p'_x = \nu \Delta u', \quad (8.41)$$

$$u'_t + Uv'_x + \frac{1}{p} p'_y = \nu \Delta v', \quad (8.42)$$

$$u'_x + v'_y = 0, \quad (8.43)$$



или в векторной форме

$$u_t + Uu_x + v' \left( \frac{dU}{dY}, 0 \right) + \frac{1}{p} \Delta p' = \nu \Delta u, \quad (8.44)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (8.45)$$

где  $\Delta u' = (\Delta u', \Delta v')$ .

Будем рассматривать уравнения (8.44), (8.45) совместно со следующими начальным и граничным условиями:

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad (8.46)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8.47)$$

где  $\partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ .

**Определение 8.8.** Вектор-функция

$$u = (u', v') \in L^2(0, T; H)$$

называется обобщенным по Соболеву—Лерэ решением задачи (8.44)–(8.47), если

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left[ u\varphi_t + Uu\varphi_x - v' \left( \frac{dU}{dy}, 0 \right) \varphi - \nu u \Delta \varphi \right] dx dt +$$

$$+ \int_{\Omega} u^0 \varphi(x, y, 0) dx = 0,$$

$$\forall \varphi \in C^\infty(0, T; W): \varphi(x, y, T) = 0,$$

где  $W = \left\{ \psi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\Omega): \operatorname{div} \psi = 0 \right\}$  и  $H$  — замыкание  $W$  в пространстве  $L_2(\Omega)$ .

Так как уравнение (8.44) линейно, то нетрудно доказать, что существует и единственно обобщенное по Соболеву—Лерэ решение задачи (8.44)–(8.47).

**Замечание 8.4.** Из уравнений (8.41)–(8.43) можно вывести уравнение Орра—Зоммерфельда [182]. Оно является основным в методе малых колебаний.

Далее выведем основное энергетическое неравенство. Для того чтобы упростить вывод, сделаем это на основе уравнения (8.44). Умножая обе части равенства (8.44) скалярно на  $u$  в пространстве  $L_2(\Omega)$ , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = - \int_{\Omega} v' \frac{dU}{dy} u' dx dy - \nu \|u(t)\|_{W_2^1(\Omega)}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \varphi^2 dx dy, \\ \|\varphi\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} [\varphi_x^2 + \varphi_y^2] dx dy. \end{aligned}$$

Интегрируя предыдущее равенство по  $t$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ + \max_y \left| \frac{dU}{dy} \right| &\int_0^s \int_{\Omega} |u'| dx dy dt - \nu \int_0^s \|u(t)\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2 dt, \quad \forall s \in (0, T). \end{aligned}$$

Используя неравенство Пуанкаре—Фридрихса, приходим к основному энергетическому неравенству:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ + \int_0^s \|u(t)\|_{W_{\frac{1}{2}}(\Omega)}^2 &\cdot \left[ -2\nu + C^2(\Omega) \max_y \left| \frac{dx}{dy} \right| \right] dt, \\ \forall s \in (0, T). \end{aligned}$$

Итак, если

$$-2\nu + C^2(\Omega) \max_y \left| \frac{dx}{dy} \right| < 0,$$

то кинетическая энергия возмущений затухает с течением времени.

В качестве примера рассмотрим двумерное течение несжимаемой жидкости в трубе в общем случае с негладкими стенками. Также мы допускаем возможность того, что в жидкости находятся обтекаемые тела. Предположим, что основное движение описывается течением Хагена—Пуазейля [182, 252].

Для трубы справедливы соотношения:

$$C^2(\Omega) = \frac{d^2}{2}, \quad \nu = \frac{\bar{v}d}{\Re},$$

где  $\Re$  — число Рейнольдса,  $\bar{v}$  — среднее значение функции  $U$ ,  $d$  — диаметр трубы;  $U$  — скорость Хагена—Пуазейля [182]:

$$U(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right)$$

( $l$  — длина рассматриваемого участка трубы,  $p_1$  и  $p_2$  — величины давления на границе этого участка,  $\mu = \nu\rho$ ).

Получаем

$$-2\nu + C^2(\Omega) \max_y \left| \frac{dU}{dy} \right| = \frac{d^3}{2} \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \left( 1 - \frac{1}{2\Re} \right).$$

Следовательно,  $\Re_{cr} = 1/2$ . Если  $\Re < \Re_{cr}$ , кинетическая энергия возмущенного течения уменьшается с течением времени. Столь большое различие между этим результатом и результатом, полученным методом малых колебаний, по-видимому, вызвано предположением, что границы трубы негладкие, и допущением наличия в жидкости обтекаемых тел.

Практически то же число Рейнольдса может быть получено и для некоторых других форм течения, например для некоторых форм свободной турбулентности. На этом основании мы можем предполагать, что получено число

$$\Re_{\kappa} \sim \frac{1}{\kappa},$$

где  $\kappa = 0.4$  — число Кармана.

Далее рассмотрим, как энергетический метод может быть применен для получения некоторых важных результатов, обсуждаемых ниже. Пусть  $u$  — периодическая по  $y$  функция, принимающая значение 0 в точках  $y = 0, \pm r, \pm 2r, \dots, +nr = 1/2$ . Поступая так же, как и при выводе основного энергетического неравенства, получаем следующую цепочку неравенств и значений числа Рейнольдса:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R} \times [0, r])}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R} \times [0, r])}^2 + \\ &+ \int_0^s \|u(t)\|_{W_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [r, 2r])}^2 \left[ -2\nu + \frac{r^2}{2} \max_{y \in [0, r]} \left| \frac{dU}{dy} \right| \right] dt; \\ \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R} \times [r, 2r])}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R} \times [r, 2r])}^2 + \\ &+ \int_0^s \|u(t)\|_{W_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [r, 2r])}^2 \left[ -2\nu + \frac{r^2}{2} \max_{y \in [r, 2r]} \left| \frac{dU}{dy} \right| \right] dt, \quad \Re_{cr} = \frac{d^3}{4r^3} \\ &\forall s \in (0, T), \end{aligned}$$

и т. д.

Из последних неравенств следуют следующие важные свойства течений жидкости, подтверждаемые экспериментом [182, 252]:

- 1) для устойчивости ламинарных течений наиболее «опасны» длинноволновые возмущения;
- 2) ламинарное течение наименее устойчиво в окрестности границы течения.

**§ 9. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
КАДОМЦЕВА—ПЕТВИАШВИЛИ И КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА**

В данном разделе излагается теория функциональных решений для уравнений КП и КдВ, которая будет применяться в следующем разделе данной главы. Мы сохраним, по существу, все обозначения раздела 8.2, чтобы не усложнять изложение лишними обозначениями.

Рассмотрим задачу Коши

$$J(u) = u_t + uu_x - \alpha u_{xxx} + \beta U_{yy} = 0, \quad (8.48)$$

$$u(x, y, 0) = u^0(x), \quad (8.49)$$

$$\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad 0 < T \leq \infty,$$

где  $U$  — первообразная функции  $u$ :

$$U(x, y) = - \int_x^\infty u(z, y) dz.$$

Уравнение (8.48) называется уравнением Кадомцева—Петвиашвили (КП); формально полагая в уравнении (8.48)  $\beta$  равным нулю, получаем уравнение КдФ. Соответственно полагая формально в (8.48)  $\alpha$  и  $\beta$  одновременно равными нулю, получим уравнение Хопфа.

Следующее интегральное уравнение служит для определения обобщенного по Соболеву решения задачи (8.48),(8.49):

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}_2} \left( u\varphi_t + \frac{1}{2}u^2\varphi_x - \alpha u\varphi_{xxx} - \beta U\varphi_{yy} \right) dx dy dt + \int_{\mathbb{R}_2} \varphi(x, 0)u^0 dx dy = 0,$$

$$\forall \varphi \in C^1(0, T; \dot{C}^\infty(\mathbb{R}_2)), \quad \varphi(x, T) = 0. \quad (8.50)$$

Обозначим  $\mathcal{E}$  векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций вида

$$F_{\varphi, \varphi_1, \alpha, \beta} = u\varphi_t + \frac{1}{2}u^2\varphi_x - \alpha u\varphi_{xxx} - \beta U\varphi_{yy} + u\varphi_1,$$

$$\forall \varphi \in C^1(0, T; \dot{C}^\infty(\mathbb{R}_2)), \quad \forall \varphi_1 \in D(\mathbb{R}_2 \times (0, T)),$$

$$\varphi(x, T) = 0, \quad u \in L_2(\mathbb{R}_2 \times (0, T)).$$

Для каждого  $F \in \mathcal{E}$  определим операторы  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  по формулам

$$\pi_1(F) = F_{\varphi,0,\alpha,\beta}, \quad (8.51)$$

$$\pi_2(F) = F_{\varphi,0,\alpha,0}, \quad (8.52)$$

$$\pi_3(F) = F_{\varphi,0,0,0}. \quad (8.53)$$

Оператор  $\pi_0$  определим обычным образом (см. гл. 2):

$$\pi_0(F) = \varphi(x, 0)u^0.$$

Пусть  $\mathcal{E}^+ = \{l\}$  — алгебраически сопряженное пространство к  $\mathcal{E}$ . На  $\mathcal{E}^+$  зададим топологию  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  посредством системы полунорм, аналогично гл. 2 и рассмотренной выше в этой главе модели несжимаемой жидкости. Во избежание излишних повторений детали рассуждений, которые проводятся по стандартной схеме, соответствующей обозначениям и утверждениям этих разделов книги, мы опустим.

**Определение 8.9.** Элемент  $l \in L$  назовем *функциональным решением задачи* (8.48), (8.49), с начальным условием  $u^0 \in L_2(\mathbb{R}_2)$ , если для любого  $F \in \mathcal{E}$  справедливо равенство

$$l(\pi_1(F)) + l_{u^0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (8.54)$$

**Определение 8.10.** Элемент  $l \in L$  назовем *функциональным решением задачи* (8.48), (8.49) при  $\beta = 0$ , с начальным условием  $u^0 \in L_2(\mathbb{R}_2)$ , если для любого  $F \in \mathcal{E}$  справедливо равенство

$$l(\pi_3(F)) + l_{u^0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (8.55)$$

**Определение 8.11.** Элемент  $l \in L$  назовем *функциональным решением задачи* (8.48), (8.49) при  $\alpha, \beta = 0$ , с начальным условием  $u^0 \in L_2(\mathbb{R}_2)$ , если для любого  $F \in \mathcal{E}$  справедливо равенство

$$l(\pi_2(F)) + l_{u^0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (8.56)$$

Ниже вместо задачи (8.48), (8.49) при соответствующих значениях параметров  $\alpha, \beta$  будем рассматривать задачи (8.54)–(8.56) относительно неизвестной  $l \in L$ .

## § 10. МЕТОД ГАЛЁРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

В этом разделе доказывается разрешимость периодической задачи для уравнения КдФ без применения метода параболической регуляризации [112], причем при этом потребовалось только три краевых

условия периодичности вместо четырех в [112]. К сожалению, так как не доказана единственность решений данной задачи, если начальная функция  $u^0$  только из пространства  $W_2^1(\Omega)$  ( $\Omega \in \mathbb{R}$  — ограниченная область — в данной работе отрезок  $[0, 1]$ ), нельзя утверждать, что полученное здесь решение совпадает с решением, полученным методом параболической регуляризации в [112]. Рассмотрим задачу

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} = 0, \quad (8.57)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad (8.58)$$

$$\frac{\partial^j u(1, t)}{\partial x^j} = -\frac{\partial^j u(0, t)}{\partial x^j}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (8.59)$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad 0 < T \leq \infty, \quad x \in [0, 1].$$

Пусть  $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$  — система линейно независимых функций из  $C^\infty(\Omega)$ , удовлетворяющая следующим условиям периодичности:

$$\frac{\partial^j \varphi(1, t)}{\partial x^j} = -\frac{\partial^j \varphi(0, t)}{\partial x^j}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Обозначим  $W$  множество всех линейных комбинаций функций  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, \infty$ . Пусть

$V$  — пополнение  $W$  по норме пространства  $W_2^1(\Omega)$ ;

$H$  — пополнение  $W$  по норме пространства  $L_2(\Omega)$ ;

$V$  — пополнение  $W$  по норме пространства  $W_2^4(\Omega)$ .

Будем обозначать

$$|u| = \sqrt{(u, u)}$$

норму функции  $u$  в пространстве  $L_2(\Omega)$  (соответственно выражение  $(\cdot, \cdot)$  будет обозначать скалярное произведение в этом пространстве).

**Определение 8.12.** Назовем *обобщенным решением задачи* (8.57)–(8.59) функцию  $u \in L_2(0, T; V)$ , удовлетворяющую следующим уравнениям и условиям:

$$(u_t, \varphi) - \frac{1}{2} (u^2, \varphi_x) - \alpha (u_x, \varphi_{xx}) = 0, \quad \forall \varphi \in \hat{V}, \quad (8.60)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad (8.61)$$

$$\frac{\partial^j u(1, t)}{\partial x^j} = -\frac{\partial^j u(0, t)}{\partial x^j}, \quad j = 0, 1, 2. \quad (8.62)$$

**Предложение 8.4.** Пусть задана функция  $u^0 \in V$ . Тогда существует обобщенное решение задачи (8.57)–(8.59).

□ Для каждого  $m \geq 1$  определим приближенное решение задачи (8.57)–(8.59) посредством соотношений

$$u^m = \sum_{j=1}^m C_j^{(m)}(t) \varphi_j, \quad (8.63)$$

$$(u_t^m, \varphi_k) - \frac{1}{2}((u^m)^2, \varphi_{kx}) - \alpha(u_x^m, \varphi_{kxx}) = 0,$$

$$\forall \varphi_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

где последовательность функций выбрана таким образом, что

$$u_m^0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u^0$$

в пространстве  $V$ .

**Априорные оценки.** Умножим обе части равенства (8.63) на  $C_k^{(m)}$  и суммируем по  $k$  от 1 до  $m$ :

$$(u_t^m, u^m) - \frac{1}{2}((u^m)^2, u_x^m) - \alpha(u_x^m, u_{xx}^m) = 0.$$

Учитывая, что

$$(u^{m2}, u_x^m) = \frac{u^{m3}}{3} \Big|_0^1 = 0,$$

$$(u_x^m, u_{xx}^m) = \frac{u_x^{m2}}{2} \Big|_0^1 = 0,$$

получаем

$$|u^m| \leq C < \infty, \quad (8.64)$$

где постоянная  $C$  от номера  $m$  не зависит. Последняя оценка означает, что последовательность функций  $u^m$  ограничена в пространстве  $L_\infty(0, T; H)$ . Так как функции  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, \infty$ , принадлежат пространству  $\hat{V}$ , то, по теореме вложения Соболева [151], из соотношения (8.63) следует, что почти всюду верно равенство

$$u_t^m + u^m u_x^m - \alpha u_{xxx}^m = 0. \quad (8.65)$$

Умножим его скалярно на функцию

$$\psi(x, t) = (u^m)^2 + 2\alpha u_{xx}^m.$$

Применяя условия периодичности, получим

$$\int_{\Omega} (u_x^m u^m + \alpha u_{xxx}^m)((u^m)^2 + 2\alpha u_{xx}^m) dx = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{(u^m)^3}{3} - \alpha (u_x^m)^2 \right) dx = 0.$$

В силу теорем вложения Соболева имеем

$$\|u_0^m\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq C_1 \|u_0^m\|_{L_{W^2}(\Omega)},$$

где постоянная  $C_1$  от номера  $m$  не зависит.

Поэтому из последнего равенства выводим оценку

$$\left| \int_{\Omega} \left( \frac{(u^m)^3}{3} - \alpha (u_x^m)^2 \right) dx \right| \leq C_2, \quad (8.66)$$

в которой константа  $C_2$  не зависит от  $m$ .

Далее (опуская пока индекс) получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u^3 dx \right| &\leq C_0 \|u\|_{L_{\infty}(\Omega)} |u|^2 \leq C^2 \|u\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq \\ &\leq A^2 (|u|^2 + |u_x|^2)^{1/2} \leq c^2 (C^2 + |u_x|^2)^{1/2} \leq \\ &\leq C_3 + \frac{3|\alpha|}{2} |u_x|^2. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Учитывая неравенства (8.67) и (8.66), получаем соотношения

$$|u_x^m| \leq C_4 < \infty,$$

где постоянная  $C_4$  от номера  $m$  не зависит. Последняя оценка означает, что последовательность функций  $u^m$  ограничена в пространстве  $L_{\infty}(0, T; V)$  и в  $L_{\infty}(Q)$ , где  $Q = (0, T) \times \Omega$ .

Далее,

$$\int_{\Omega} (u^m)^4 dx \leq \text{vrai sup } Q (u^m)^2 \int_{\Omega} (u^m)^2 dx \leq C_5.$$

Следовательно, последовательность функций  $(u^m)^2$  ограничена в пространстве  $L_2(Q)$ . Покажем, что  $(u^m)^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u^2$  слабо в  $L_2(\Omega)$ ,



где  $u$  — слабый предел последовательности функций  $u^m$  в пространстве  $L_2(0, T; V)$ :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} ((u^m)^2 - u^2) \varphi \, dx \, dt \right| = \left| \int_{\Omega} (u^m - u)(u^m + u) \varphi \, dx \, dt \right| \leq \\ & \leq T \sup_t \left( \operatorname{vrai} \sup_{\Omega} |u^m + u| \int_{\Omega} |u^m - u| |\varphi| \, dx \, dt \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \\ & \quad \forall \varphi \in L_2(Q), \end{aligned}$$

в силу того, что вложение  $W_2^1(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$  компактно. (Вывод содержит предположение  $\|u\|_{L_{\infty}(Q)} < \infty$ , которое будет доказано в конце раздела.)

**Предельный переход.** Умножим соотношение (8.63) скалярно на функцию  $\psi(t) \in C^1(0, T)$ ,  $\psi(T) = 0$ :

$$\begin{aligned} & \int_Q u^m \varphi_k \psi' \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_Q (u^m)^2 \varphi_{kx} \psi \, dx \, dt + \\ & + \alpha \int_Q u_x^m \varphi_{kxx} \psi \, dx \, dt + \int_Q u_0^m \varphi_k \psi(0) \, dx = 0, \quad (8.68) \\ & \quad \forall \varphi_k, \quad k = 1, \dots, m \end{aligned}$$

В силу того, что последовательность  $u^m$  ограничена в пространстве  $L_{\infty}(0, T; H)$  и того, что

$$(u^m)^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u^2$$

слабо в  $L_2(Q)$ , где  $u$  — слабый предел последовательности функций  $u_m$  в пространстве  $L_2(0, T; V)$ , в соотношении (8.68) возможен предельный переход по  $m \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} & \int_Q u \varphi_k \psi' \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_Q (u)^2 \varphi_{kx} \psi \, dx \, dt + \alpha \int_Q u_x \varphi_{kxx} \psi \, dx \, dt + \\ & + \int_{\Omega} u^0 \varphi_k \psi(0) \, dx = 0, \quad \forall \varphi_k, \quad k = 1, \dots, \infty. \quad (8.69) \end{aligned}$$

Равенство (8.69) справедливо для любой линейной комбинации элементов  $\varphi_j$  в силу линейности по этим функциям и, следовательно, для  $\forall \varphi \in \hat{V}$ . Отсюда мы получаем, что равенство (8.61) выполняется в смысле теории распределений. Доказательство того, что функция  $u$

удовлетворяет соотношению (8.62), стандартно. Предложение доказано. ■

**Лемма 8.3.** Пусть  $u^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u$  слабо в пространстве  $L_2(Q)$ . Если

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|u^m\|_{L_\infty(Q)} < \infty,$$

то  $\|u\|_{L_\infty(Q)} < \infty$ .

### § 11. ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t + u_{xx} = u_{xxx}, \quad (8.70)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad (8.71)$$

$$\frac{\partial^j u(1, t)}{\partial x^j} = -\frac{\partial^j u(0, t)}{\partial x^j}, \quad j = 0, 1, 2. \quad (8.72)$$

$$t \in [0, T], \quad 0 < T \leq \infty, \quad x \in [0, 1], \quad Q = [0, T] \times [0, 1].$$

Пусть функция  $u \in L_2(Q)$  — обобщенное решение задачи (8.70)–(8.72). Обозначим  $\mathcal{A}$  класс таких решений задачи (8.70)–(8.72), что  $u \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1))$ , и для  $u$  выполнен второй закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left( \frac{u^3}{3} - u_x^2 \right) dx = 0. \quad (8.73)$$

Очевидно, что классу  $\mathcal{A}$  принадлежит обобщенное решение задачи (8.57)–(8.59), построенное в предыдущем разделе.

**Предложение 8.5.** Пусть

$$\|u^0\|_{L_3[0,1]} < \infty, \quad \|u_x^0\|_{L_2[0,1]} = \infty.$$

Тогда обобщенное решение задачи (8.70)–(8.72) не принадлежит классу  $\mathcal{A}$ .

□ Интегрируя равенство по  $t$  в интервале от 0 до  $s$ ,  $0 < s < T$ , имеем

$$\begin{aligned} \forall s, \quad 0 < s \leq T, \quad & \frac{1}{3} \|u\|_{L_3[0,1]}^3 + \|u_x\|_{L_2[0,1]}^2 \geq \\ & \geq \frac{1}{3} \|u^0\|_{L_3[0,1]}^3 + \|u_x^0\|_{L_2[0,1]}^2. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Из теоремы вложения Соболева и сделанных выше предположений следует, что предложение доказано. ■

### § 12. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Сперва введем некоторые обозначения. Обозначим

$$(u, v) = \int_0^l uv \, dx; \quad ((u, v)) = (u_x, v_x), \quad \forall u, v \in W_2^1(0, l),$$

$$|u| = \sqrt{(u, u)}, \quad \|u\| = \sqrt{((u, u))}.$$

Для произвольной системы функций  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  запись  $Sp\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  означает множество всех линейных комбинаций этой системы.

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = u_{xx} + \text{sign } u_x, \quad (x, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \quad (8.75)$$

$$u_x(l, t) = 0, \quad (8.76)$$

$$u(0, t) = \theta(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (8.77)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in [0, l], \quad (8.78)$$

$$0 < l < \infty.$$

Обозначим  $v = u_x$ . Из задачи (8.76)–(8.78) выводим следующие соотношения:

$$v_t = v_{xx} + \frac{\partial}{\partial x} \text{sign } v, \quad Q = [0, l] \times [0, T], \quad (8.79)$$

$$v(l, t) = 0, \quad (8.80)$$

$$v(x, 0) = u^0(x). \quad (8.81)$$

**Предложение 8.6.** Пусть  $l$  – регулярное функциональное решение задачи (8.79)–(8.81). Тогда оно представимо в виде

$$l = \int_Q v \varphi_1 \, dx \, dt - \int_0^1 u^0 \varphi(x, 0) \, dx, \quad (8.82)$$

$$\forall \varphi_1 \in D(Q), \quad \forall \varphi \in C^\infty(Q), \quad \varphi(l, t) = \varphi(x, T) = 0,$$

где  $v$  – функция из пространства  $L_1(Q)$ .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 8.5 и потому здесь опускается.

**Определение 8.13.** Функцию  $u$  назовем *функциональным решением задачи* (8.76)–(8.78), если

$$u = \theta(t) + \int_0^x v(s) ds, \quad 0 < x \leq l,$$

где функция  $v$  определяется равенством (8.82).

**Теорема 8.6.** Пусть  $u^0 \in W_2^1(0, l)$ . Тогда существует обобщенное решение задачи (8.76)–(8.78).

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму:

**Лемма 8.4.** Пусть  $u^0 \in W_2^1(0, l)$ . Тогда существует регулярное функциональное решение задачи (8.79)–(8.81), причем функция  $v$ , определяемая равенством (8.82), принадлежит пространству  $L_2(0, T; W_2^1(0, l))$ .

□ Доказательство леммы проведем методом полудискретизации. Пусть  $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$  — система линейно независимых функций из  $C^\infty(0, l)$ ,  $\varphi(l) = 0$ . Обозначим через  $V$  пространство, которое получается замыканием множества всех линейных комбинаций функций  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, \infty$ , в  $W_2^1(0, l)$ . Пусть  $N \geq 1$  — целое число,  $\tau = T/N$ , где  $T > 0$  — некоторое число. Сейчас мы рекурсивно определим семейство функций, скажем  $v_N^0, v_N^1, \dots, v_N^N$  такое, что  $v_N^m$  будет в некотором смысле аппроксимировать искомую функцию  $v$  на интервале  $m\tau \leq t \leq (m+1)\tau$ . Положим  $v_N^0 = u^0$ . Если функции  $v_N^0, \dots, v_N^{m-1}$  уже известны, то определим  $v_N^m$  посредством соотношений

$$v_N^m = \sum_{r=1}^N \xi_{r,N} \varphi_r, \tag{8.83}$$

$$(v_N^m - v_N^{m-1}, \varphi) + \tau((v_N^m, \varphi)) + \tau(\text{sign } v_N^{m-1}, \varphi_x) = 0,$$

$$\forall \varphi \in Sp\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}.$$

Отметим, что выбранный метод регулярен в силу полноты базисных функций и выбора разностной аппроксимации производной. Полагая в (8.83)  $\varphi = v_N^m$ , приходим к равенству

$$(v_N^m - v_N^{m-1}, v_N^m) + \tau((v_N^m, v_N^m)) + \tau(\text{sign } v_N^{m-1}, v_{N,x}^m) = 0.$$

Справедливо равенство

$$2(a - b, a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2 \quad \forall a, b \in L_2(0, l).$$

Следовательно,

$$|v_N^m|^2 - |v_N^{m-1}|^2 + |v_N^m - v_N^{m-1}|^2 + 2\tau \|v_N^m\|^2 = -2\tau (\text{sign } v_N^{m-1}, v_{Nx}^m).$$

Применяя к правой части последнего равенства неравенство Коши—Буняковского, получим соотношение

$$|v_N^m|^2 - |v_N^{m-1}|^2 + |v_N^m - v_N^{m-1}|^2 + \tau \|v_N^m\|^2 \leq \tau l^2.$$

Суммируя последнее неравенство по  $m$  от 1 до  $r$ ,  $1 < r < N$ , имеем

$$|v_N^r|^2 + \sum_{r=1}^N (|v_N^m - v_N^{m-1}|^2 + \tau \|v_N^m\|^2) \leq \tau l^2 + |u^0|^2.$$

Последнее неравенство означает, что последовательность  $v_N$  ограничена в пространстве  $L_2(0, T; V)$  ( $v_N$  — функция, принимающая на интервалах  $m\tau \leq t \leq (m+1)\tau$  значение  $v_N^m$ ), и таким образом, выбранный метод слабо устойчив.

Так как функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots$  составляют базис в пространстве  $V$ , то в силу теорем вложения Соболева любая функция  $\eta \in \mathring{C}^2(0, l)$  представима в виде ряда

$$\eta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \varphi_j, \tag{8.84}$$

который сходится в  $\mathring{C}^2(0, l)$  почти всюду.

Запишем выражение для слабой невязки выбранного метода:

$$\delta_N(F) = \int_Q (v_N \eta \psi' + v_N \eta_{xx} \psi - \text{sign } v_N \eta_x \psi) dx dt + \int_0^1 v_N|_{t=0} \eta \psi(0) dx,$$

$$\forall \eta \in \mathring{C}^\infty(0, l), \quad \forall \psi \in C^\infty(0, T), \quad \psi(T) = 0. \tag{8.85}$$

Умножим (8.83) скалярно на  $v(t)$ . Имеем

$$\int_Q \left( -\frac{v_N(t+\tau) - v_N(t)}{\tau} \varphi \psi + v_N \varphi_{xx} \psi - \text{sign } v_N \varphi_x \psi \right) dx dt = 0. \tag{8.86}$$

Далее,

$$\int_Q \frac{v_N(t+\tau)}{\tau} \varphi \psi dx dt = \int_Q \frac{v_N(t)}{\tau} \varphi \psi(t-\tau) dx dt + v_N^N \psi_{cp}^N \varphi,$$

где  $\psi_{cp}^N$  и  $\psi_{cp}^0$  — средние значения функции  $\psi$  на интервалах  $[0, \tau]$  и  $[T - \tau, T]$  соответственно. Следовательно, равенство (8.86) можно переписать в виде

$$\int_Q \left( v_N(t) \frac{\psi(t - \tau) - \psi(t)}{\tau} \varphi - v_N(t) \varphi_{xx} \psi(t - \tau) + \right. \\ \left. + \text{sign } v_N(t) \varphi_x \psi(t) \right) dx dt + \\ + \int_0^l \left( v_N^N \psi_{cp}^N \varphi - v_N^0 \psi_{cp}^0 \varphi \right) dx + \int_0^1 \tau \left( -v_N^N \psi_{cp}^0 \varphi + v_N^0 \psi_{cp}^0 \varphi \right) \varphi_{xx} dx = 0.$$

Обозначим

$$A(\tau, \varphi) = \int_0^l \tau \left[ -v_N^N \psi_{cp}^N \varphi + v_N^0 \psi_{cp}^0 \varphi \right] \varphi_{xx} dx.$$

В последнем равенстве положим  $\varphi = \varphi_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , умножим его на  $\beta_j$  и просуммируем по  $j$  от 1 до  $N$ . Вычтем полученное из равенства (8.84):

$$\delta_N(F) = \int_Q \left[ v_N(t) \left( \eta \psi'(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \varphi_j \frac{\psi(t - \tau) - \psi(t)}{\tau} \right) + \right. \\ \left. + v_N(t) \left( \eta_{xx} \psi(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \varphi_{jxx} \psi(t - \tau) \right) - \right. \\ \left. - \text{sign } v_N(t) \psi(t) \left( \eta_x - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \varphi_{jx} \right) \right] dx dt + \\ + \int_0^l \left[ v_N|_{t=0} \eta \varphi(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left( v_N^N \psi_{cp}^N \varphi_j - v_N^0 \psi_{cp}^0 \varphi_j \right) \right] dx - \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j A(\tau, \varphi_j).$$

Отсюда  $\delta_N(F) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  в силу (8.83) и того, что

$$\psi \in C^\infty(0, T), \quad \psi(T) = 0.$$

Следовательно, метод слабо аппроксимирует задачу (8.79)–(8.81). Лемма доказана. ■

**Доказательство теоремы 8.6**

□ Так как  $|v_N|, \|v_N\| < \infty$ , то существует функция  $u \in L_2(0, T; V)$ , являющаяся слабым пределом последовательности  $v_N$  в пространстве  $L_2(0, T; V)$ , и, очевидно, функция  $v$  удовлетворяет (8.82). Положим

$$u = \theta(t) + \int_0^x v(s) ds, \quad 0 < x \leq 1.$$

Теорема доказана. ■

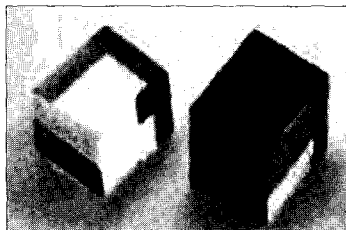
## УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ—ВЛАСОВА— БОЛЬЦМАНА—СМОЛУХОВСКОГО

### § 1. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ ПОТОКАМИ

Уравнение Лиувилля, т. е. уравнение неразрывности, является основополагающим законом сохранения, который определяет статистические решения динамических систем, моделирующих взаимодействие частиц плазмы, гидродинамические течения, положение фронта фазового перехода при выращивании кристаллов из расплава и т. д. Важно подчеркнуть, что уравнения Власова, описывающие динамику плазмы в приближении самосогласованного поля, представляют собой не что иное, как разновидность уравнения Лиувилля. Весьма интересные явления для решений уравнения Лиувилля имеют место при наличии скачков поля скоростей течения. В газовой динамике это приводит к ударным волнам, но возможны также решения типа «черной дыры», когда частицы среды аккумулируются в одной точке. В этом случае уравнение Лиувилля—Власова статистическое решение системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в этом случае реализуется «скользящий режим» в теории А. Ф. Филиппова [169], а соответствующих классических и обобщенных решений не существует. Такого рода задачи возникают в процессе моделирования массопереноса в ядерно-энергетических установках при наличии встречных потоков вещества (лазерный термоядерный синтез). Расчет ЯЭУ, основанный на применении лазерного термоядерного синтеза, связан с численным решением уравнения неразрывности (Власова—Лиувилля), содержащего разрывное поле скоростей переносимого в сталкивающихся потоках вещества. В процессе столкновения вещество приобретает значительные температуры (порядка  $2 \cdot 10^7 \text{K}$ ), обеспечивающие возможность выхода нейтронов.

Одним из важнейших направлений применения рассмотренных моделей для уравнений Власова—Лиувилля—Больцмана—Смолуховского является задача исследования процессов конденсированной барионной материи в международном проекте физики высоких энергий СВМ [197](Compressed Baryonic Matter), получаемой при столкновении встречных пучков частиц в ускорителе





**Рис. 9.1.** Искусственные алмазы, выращенные в СВЧ-печи в виде параллелепипедов

на тяжелых ионах. Аналогичная проблема связана с общим классом задач для уравнения Власова теории плазмы, в котором имеется разрывный потенциал кулоновского типа. Исследования кинетики плазмы, состоящей из многих заряженных частиц, привели к выводу кинетического уравнения плазмы, которое было получено в 1936–38 годах советскими учеными А. А. Власовым и Л. Д. Ландау. Это уравнение обычно называют по имени Власова. О методах решения плазменных задач подробно написано в монографиях [5, 6, 23, 27]. Таким образом, актуальной является проблема численного моделирования для уравнения типа Лиувилля при наличии разрывных коэффициентов, так как разностные схемы в этом случае, вообще говоря, не являются аппроксимирующими.

Существенным моментом, объединяющим математические модели динамики плазмы и динамики роста кристаллов, является использование уравнения Лиувилля с разрывными коэффициентами под знаком производных, что, вообще говоря, влечет возникновение функциональных решений. В частности, весьма интересной с этой точки зрения является технология, разработанная группой Рассела Хемлея из института Карнеги (США). Это метод химического осаждения паров (CDV), применяемый для выращивания кристаллов алмазов. Крупные алмазы получают методом спекания в микроволновой СВЧ печи в водородной плазме. В этом процессе атомы углерода осаждаются из газа и образуют кристаллы, которые растут на подложке. Кристаллы получаются в виде параллелепипедов, изображенных на рис. 9.1.

**Пример 9.1** (метод сглаживания В. А. Стеклова для разрывного поля одномерных скоростей в уравнении Лиувилля). Рассмотрим динамическую систему на числовой прямой

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

где  $f(x)$  назовем полем скоростей частиц в фазовом пространстве  $\mathbb{R} = \{x\}$ . Статистическое решение  $p(x, t)$  (плотность вероятности распределения частиц в фазовом пространстве  $\mathbb{R}$  в момент времени  $t$ ) для этой динамической системы определяется задачей Коши для уравнения Лиувилля

$$\begin{cases} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [p(x, t)f(x)]}{\partial x} = 0, \\ p(x, t)|_{t=0} = p^0(x), \end{cases} \quad (9.1)$$

где  $p^0$  — начальная плотность вероятности распределения частиц в фазовом пространстве  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим простейший случай разрывного поля скоростей

$$f(x) = -\operatorname{sgn}(x), \quad (9.2)$$

аналогичный моделям останавливающихся частиц, рассмотренным выше в § 5 и 6 гл. 1. Вид функции  $f(x)$  в равенстве (9.2) соответствует ситуации, когда частицы, со скоростями, равными по абсолютной величине единице, движутся навстречу друг другу.

Для построения приближенного метода решения задачи (9.1), (9.2) воспользуемся регуляризацией, основанной на сглаживании разрывной функции поля скоростей  $f(x)$  на интервале  $[-\Delta; \Delta]$  методом В. А. Стеклова:

$$\bar{f}_\Delta(x) = \frac{1}{2\Delta} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\Delta} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} (-\operatorname{sgn}(\xi)) d\xi = -\frac{x}{\Delta}, \quad x \in [-\Delta; \Delta].$$

Таким образом сглаженная задача принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial p_\Delta(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial p_\Delta(x, t)\bar{f}_\Delta(x)}{\partial x} = 0, \\ p_\Delta(x, t)|_{t=0} = p^0(x), \end{cases} \quad (9.3)$$

где

$$f_\Delta(x) = \begin{cases} f(x), & |x| > \Delta, \\ \bar{f}_\Delta(x), & |x| \leq \Delta, \end{cases} = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(x), & |x| > \Delta, \\ -\frac{x}{\Delta}, & |x| \leq \Delta. \end{cases}$$

Построим решение задачи (9.3) методом характеристик, описываемых динамической системой

$$\frac{dx}{dt} = f_\Delta(x). \quad (9.4)$$

Запишем решение уравнения (9.4) в областях  $|x| > \Delta$  и  $|x| \leq \Delta$ . Если начальные данные на характеристике  $|x(0)| > \Delta$ , то справедлива формула

$$x(t) = x(0) - t \operatorname{sgn}(x(0)), \quad |x(t)| \geq \Delta. \quad (9.51)$$

Продолжение этой характеристики в область  $|x| \leq \Delta$  определяется соотношением

$$x(t) = \pm \Delta \exp\left(-\frac{1}{\Delta}(t - t_{\pm\Delta})\right), \quad t \geq t_{\pm\Delta}, \quad (9.52)$$

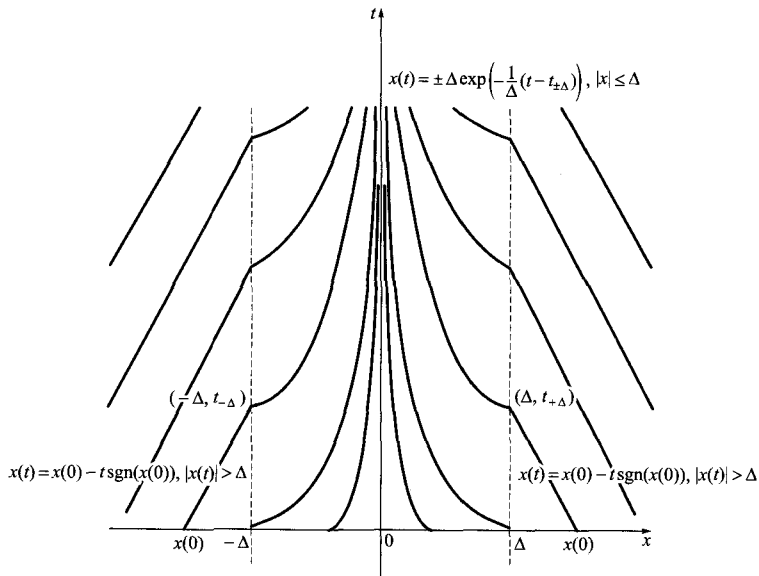


Рис. 9.2. Поле характеристик (9.5) для поля скоростей (9.2)

где величины  $t_{\pm\Delta}$  определяются из условий  $x(t_{\pm\Delta}) = \pm\Delta$ . Если же  $|x(0)| < \Delta$ , то

$$x(t) = x(0) \exp\left(-\frac{1}{\Delta}t\right), \quad t \geq 0. \quad (9.5_3)$$

Поведение характеристик в фазовой плоскости изображено на рис. 9.2.

Из уравнения Лиувилля (9.1) на характеристиках (9.5<sub>1</sub>)—(9.5<sub>3</sub>) получаем следующее тождество:

$$\frac{dp_{\Delta}(x(t), t)}{dt} = p_{\Delta}(x(t), t) \left[ \frac{1}{2\Delta} (\operatorname{sgn}(x(t) + \Delta) - \operatorname{sgn}(x(t) - \Delta)) \right].$$

В области  $|x(t)| > \Delta$  выполняется равенство

$$\operatorname{sgn}(x(t) + \Delta) - \operatorname{sgn}(x(t) - \Delta) = 0,$$

и, соответственно, в этой области на характеристиках имеем

$$p_{\Delta}(x(t), t) = p_{\Delta}(x(0), 0). \quad (9.6)$$

В области  $|x(t)| < \Delta$  выполняется равенство

$$\operatorname{sgn}(x(t) + \Delta) - \operatorname{sgn}(x(t) - \Delta) = 2,$$

и решение на характеристиках принимает следующий вид:

$$p_{\Delta}(x(t), t) = p_{\Delta}(x(t_0), t_0) \exp\left(\frac{1}{\Delta}(t - t_0)\right), \quad t \geq t_0 \geq 0. \quad (9.7)$$

С учетом того что при значениях времени до значения  $t = t_{\pm\Delta}$  величина решения уравнения Лиувилля вдоль характеристики равна  $p_{\Delta}(x(0), 0)$ , из выражения (9.7) получаем в области  $|x(t)| \leq \Delta$

$$p_{\Delta}(x(t), t) = p_{\Delta}(x(0), 0) \exp\left(\frac{1}{\Delta}(t - t_{\pm\Delta})\right), \quad t \geq t_{\pm\Delta}. \quad (9.8)$$

Чтобы получить решение в произвольной точке, надо в уравнениях (9.6) и (9.8) исключить величины  $t_{\pm\Delta}$  и начальные данные.

Итак, выберем произвольную точку  $(x, t)$  в фазовой плоскости и выпустим характеристику «назад по времени» с учетом соотношений (9.5<sub>1</sub>)–(9.5<sub>3</sub>). Отметим, что форма характеристики меняется при пересечении характеристикой прямых  $x = \pm\Delta$  в момент времени  $t_{\pm\Delta}$  (см. рис. 9.3).

Исследуем предельное поведение построенного решения при  $\Delta \rightarrow 0$ . Для этого умножим  $p_{\Delta}(x, t)$  на финитную функцию  $\varphi(x, t)$  и проинтегрируем по  $x$  от  $-\infty$  до  $\infty$  и по  $t$  от 0 до  $+\infty$ .

Переходя к пределу  $\Delta \rightarrow 0$  в полученном таким образом интегральном выражении, устанавливаем, что обобщенным решением (в интегральной форме С. Л. Соболева) задачи Коши (9.1), (9.2) является обобщенная функция

$$p(x, t) = p^0(x + t \operatorname{sgn}(x)) + \delta_0(x) \int_0^t (p^0(t - z) + p^0(z - t)) dz, \quad (9.9)$$

где  $-\delta_0$  обобщенная дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке  $x = 0$ .

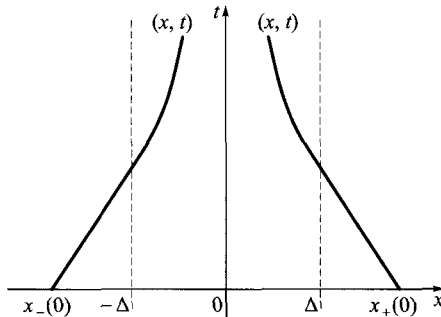


Рис. 9.3. Построение решения методом характеристик, выпущенных «назад»

Построенное решение является частным случаем функциональных решений законов сохранения, рассмотренных в гл. 2. Главной причиной возникновения функционального решения в рассмотренном примере служит наличие разрыва поля скоростей.

## § 2. УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ—ВЛАСОВА

В основу построения приближенных методов для уравнений Лиувилля—Власова положим работу Р. Л. Добрушина [78]. Будем рассматривать обобщенные решения этих уравнений, описывающих динамику системы частиц, взаимодействующих посредством ограниченного гладкого парного потенциала  $\Phi$ . Эта конструкция Р. Л. Добрушина ниже будет использована при рассмотрении функциональных решений уравнения Лиувилля—Власова, когда потенциал взаимодействия является неограниченным и не обладает свойством гладкости, например, кулоновский потенциал.

Пусть  $\mathbb{R}_n$  — евклидово пространство размерности  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Пусть  $C_b^k(\mathbb{R}_n)$  (и  $\hat{C}_b^k(\mathbb{R}_n)$ ),  $k = 0, 1, \dots$ , — пространства функций аргументов  $x \in \mathbb{R}_n$  со значениями в пространстве  $\mathbb{R}_n$  (или соответственно в  $\mathbb{R}_1$ ), имеющих ограниченные частные производные порядков  $j = 0, 1, \dots, k$ . Пусть  $C_0^k(\mathbb{R}_n)$  (и  $\hat{C}_0^k(\mathbb{R}_n)$ ) — пространства принадлежащих  $C_b^k(\mathbb{R}_n)$  (или соответственно  $\hat{C}_b^k(\mathbb{R}_n)$ ) функций, имеющих компактный носитель. Пусть  $L^k(\mathbb{R}_n)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — пространство функций от  $x \in \mathbb{R}_n$  со значениями в пространстве  $\mathbb{R}_n$ , имеющих ограниченные непрерывные частные производные порядков  $j = 1, \dots, k$  (сами функции могут быть неограниченными). Через  $Df$  будем обозначать градиент функции  $f \in \hat{C}_b^1(\mathbb{R}_n)$ . В случае, когда точки  $x \in \mathbb{R}_n$  представляются в виде

$$x = (x_1, x_2), \quad \text{где } x_1 \in \mathbb{R}_{n_1}, \quad x_2 \in \mathbb{R}_{n_2}, \quad n_1 + n_2 = n,$$

через  $D_{x_1}f$  и  $D_{x_2}f$  будем обозначать градиенты  $f$  по соответствующей совокупности переменных, так что  $Df = (D_{x_1}f, D_{x_2}f)$ .

Пусть  $B_n$  — совокупность борелевых подмножеств в  $\mathbb{R}_n$  и  $M_n$  — совокупность зарядов на  $\mathbb{R}_n$ , т. е. счетно-аддитивных вещественнозначных функций множества  $\mu(B)$ ,  $B \in B_n$  таких, что норма

$$\|\mu\| = \sup_{B \in B_n} |\mu(B)| < \infty. \quad (9.10)$$

Через  $M_n^+$  будем обозначать совокупность конечных мер, т. е. зарядов  $\mu \in M_n$  с неотрицательными значениями. Совокупность мер  $\mu \in M_n^+$  таких, что

$$\|\mu\| = \mu(\mathbb{R}_n) = C,$$

будем обозначать через  $M_n^+(C)$ . Меры  $\mu \in M_n^+(1)$  называют вероятностными. Для любой функции  $f \in C_b^0(\mathbb{R}_n)$  или  $f \in \hat{C}_b^0(\mathbb{R}_n)$  положим

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}_n} f(x)\mu(dx), \quad \mu \in M_n. \quad (9.11)$$

Нас будет интересовать асимптотика при  $N \rightarrow \infty$  решения системы  $N$  дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = A(x_i(t)) + N^{-1} \sum_{j=1}^N B(x_i(t) - x_j(t)), \quad (9.12)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R}_1,$$

где  $x_1, \dots, x_N$  и  $A \in L^1(\mathbb{R}_n)$ ,  $B \in C_b^1(\mathbb{R}_n)$  — функции со значениями в пространстве  $\mathbb{R}_n$ . Ситуации, рассматриваемой в механике, соответствует случай, когда  $n = 6$ , точки  $x \in \mathbb{R}_6$  записываются в виде  $x = (q, p)$ , где величины  $q \in \mathbb{R}_6$  интерпретируются как положения, а  $p \in \mathbb{R}_6$  — как импульсы частиц,

$$A(x) = (p, Q(q)), \quad (9.13)$$

где  $Q \in L^1(\mathbb{R}_3)$  — внешняя сила, действующая на систему,

$$B(x) = (0, F(q)), \quad (9.14)$$

где

$$F(q) = -D\Phi(q), \quad (9.15)$$

и  $\Phi \in \hat{C}_b^2(\mathbb{R}_3)$  — парный потенциал взаимодействия частиц.

Решение  $(x_1(t), \dots, (x_N(t))$  системы (9.11) удобно описывать при помощи дискретных вероятностных мер

$$\mu_t^N(U) = \frac{1}{N} \sum_i 1, \quad i: x_i(t) \in U, \quad U \in B_n, \quad t \in \mathbb{R}_1, \quad (9.16)$$

задающих распределение частиц в фазовом пространстве в момент времени  $t$ . Естественно ожидать, что при  $N \rightarrow \infty$  меры  $\mu_t^N$  сходятся к непрерывным мерам, и уравнения Власова описывают эволюцию предельных мер. Таким образом, решение слабого уравнения Власова должно быть мерой, а решение сильного уравнения Власова, описывающего эволюцию плотностей мер, — неотрицательной функцией. Однако из-за желания доказывать отсутствие априори возможных знакопеременных решений далее рассматривается ситуация, когда начальное условие — мера, но само решение может быть зарядом.

Для любого заряда  $\mu \in M_n$  положим

$$B_\mu(x) = \mu(B(x - \cdot)) = \int_{\mathbb{R}_n} B(x - \hat{x})\mu(d\hat{x}), \quad x \in \mathbb{R}_n. \quad (9.17)$$

Ясно, что  $B_\mu \in C_b^1(\mathbb{R}_n)$ .

Пусть теперь  $\Delta \subseteq \mathbb{R}_1$  — конечный или бесконечный открытый интервал и  $t^0 \in \Delta$ . Будем говорить, что семейство  $M = \{\mu_t, t \in \Delta\}$  зарядов  $\mu_t \in M_n$ ,  $t \in \Delta$ , является слабым решением уравнения Власова на интервале  $\Delta$  с начальным условием  $\mu^0 = \mu_{t^0} \in M_n^+$  в точке  $t^0$ , если все функции  $\mu_t(h)$  от  $t \in \Delta$ , где  $h \in D(\mathbb{R}_n)$  и  $D(\mathbb{R}_n)$  — пространство Шварца вещественных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, дифференцируемы и

$$\frac{d\mu_t(h)}{dt} = \mu_t((A + B_{\mu_t})Dh), \quad h \in D(\mathbb{R}_n), \quad t \in \Delta. \quad (9.18)$$

Если заряды  $\mu_t$  заданы непрерывно дифференцируемыми плотностями  $\pi_t(x)$ ,  $t \in \Delta$ ,  $x \in \mathbb{R}_n$ , по мере Лебега в  $\mathbb{R}_n$ , то семейство  $M = \{\mu_t, t \in \Delta\}$  образует слабое решение уравнения Власова на интервале  $\Delta$  в том и только в том случае, когда  $\pi_t(x)$  является сильным решением этого уравнения, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_t(x)}{\partial t} &= SpD_x(\pi_t(x)A(x)) - \\ &- SpD_x \left( \pi_t(x) \int_{\mathbb{R}_n} B(x - \hat{x})\pi_t(\hat{x}) d\hat{x} \right), \quad (9.19) \\ &x \in \mathbb{R}_n, \quad t \in \Delta, \end{aligned}$$

где  $SpD_x R$  — это след  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} R_i$  матрицы производных вектор-функции  $R = (R_1, \dots, R_n)$ . В случае (9.13)–(9.15) уравнения (9.19) принимают обычную для механики форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_t(q, p)}{\partial t} &= -pD_p \pi_t(q, p) - Q(q)D_p(q, p) - \\ &- \left( \int_{\mathbb{R}_3} F(q - \hat{q})\pi_t(\hat{q}, \hat{p}) d\hat{q}d\hat{p} \right) D_p \pi_t(q, p). \quad (9.20) \end{aligned}$$

Введем класс  $M_\Delta$  семейств зарядов  $M = \{\mu_t, t \in \Delta\}$ , обладающих следующими двумя свойствами: во-первых, для любого ограниченного интервала  $\Delta' \subset \Delta$  выполняется неравенство

$$\sup_{t \in \Delta'} \|\mu_t\| \leq C_{\Delta'} < \infty, \quad (9.21)$$

и, во-вторых, для любого  $x \in \mathbb{R}_n$  функция

$$b_t(x) = B_{\mu_t}(x), \quad t \in \Delta,$$

непрерывна, как функция от  $t \in \Delta$ . Заметим, что семейство мер

$$M^N = \{\mu_t^N, t \in \mathbb{R}_1\},$$

определенное формулой (9.16), принадлежит классу  $M_\Delta$ . Будем обозначать через  $M_\Delta^+(\mu^0)$  совокупность семейств мер  $M \in M_\Delta$  таких, что

$$\mu_t \in M_n^+(\|\mu^0\|), \quad t \in \Delta \quad \text{и} \quad \mu_{t^0} = \mu^0, \quad \text{где} \quad \mu^0 \in M_n^+.$$

В [78] доказана следующая теорема.

**Теорема 9.1 (Р. Л. Добрушина).** Для любого интервала  $\Delta \subseteq \mathbb{R}_1$ , любых  $\mu^0 \in M_n^+$  и  $t^0 \in \Delta$  слабое решение  $M = \{\mu_t, t \in \Delta\}$  уравнения Власова с начальным условием  $\mu^0$  в точке  $t^0$ , принадлежащее классу  $M_\Delta$ , существует и единственно. При этом  $M \in M_\Delta^+(\mu^0)$ .

Если мера  $\mu^0$  задана непрерывно дифференцируемой плотностью  $\pi^0$ ,  $A \in L^2(\mathbb{R}_n)$  и  $B \in C_b^2(\mathbb{R}_n)$ , то решение  $\mu_t$  имеет непрерывно дифференцируемые плотности, удовлетворяющие сильному уравнению Власова (9.19).

Семейство мер  $M^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , заданное соотношением (9.16), является слабым решением уравнения Власова с начальным условием  $\mu_{t^0}^N$ ,  $t^0 \in \mathbb{R}_1$ . Если при  $N \rightarrow \infty$  последовательность мер  $\mu_{t^0}^N$  слабо сходится к некоторой вероятностной мере  $\mu^0$ , то при любом  $t \in \mathbb{R}_1$  меры  $\mu_t^N$  слабо сходятся к мере  $\mu_t$  такой, что  $M = \{\mu_t, t \in \mathbb{R}_1\}$  — слабое решение уравнения Власова с начальным условием  $\mu^0$ .

### § 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Уравнения Власова представляют собой, по существу, некоторую модификацию уравнения Лиувилля, порожденного дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(t, x(t)), \quad t \in \Delta, \quad (9.22)$$

где функция  $G$  принадлежит совокупности функций  $G(t, x)$  при аргументах  $t \in \Delta$ ,  $x \in \mathbb{R}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) со значениями в  $\mathbb{R}_n$  таких, что существуют непрерывные градиенты  $D_x G(t, x)$  по  $x$ , ограниченные равномерно по  $x \in \mathbb{R}_n$  и  $t \in \Delta'$ , где  $\Delta' \subseteq \Delta$  — любой конечный интервал, и что функции  $G(t, x)$  и  $D_x G(t, x)$  непрерывны по  $t \in \Delta$  при любом  $x \in \mathbb{R}_n$ . В рассматриваемом случае к уравнению (9.22)



применимы обычные теоремы о существовании и единственности на всем интервале  $\Delta$ . Фиксировав  $t^0 \in \Delta$ , обозначим через  $x(t, u)$ ,  $t \in \Delta$ ,  $u \in \mathbb{R}_n$ , решение уравнения (9.22) с начальным условием

$$x(t^0, u) = u. \tag{9.23}$$

Будем говорить, что семейство зарядов  $M = \{\mu_t, t \in \Delta\}$ , для которого выполнено условие (9.21), является слабым решением уравнения Лиувилля для динамики (9.22) с начальным условием

$$\mu^0 = \mu_{t^0} \in M_n^+$$

в точке  $t^0 \in \Delta$ , если при любом  $h \in D(\mathbb{R}_n)$  функция  $\mu_t(h)$  дифференцируема по  $t \in \Delta$  и

$$\frac{d\mu_t(h)}{dt} = \mu_t(G(t, \cdot)Dh), \quad t \in \Delta. \tag{9.24}$$

Если заряды  $\mu_t$  заданы непрерывно дифференцируемыми плотностями  $\pi_t(x)$ ,  $t \in \Delta$ ,  $x \in \mathbb{R}_n$ , по мере Лебега в  $\mathbb{R}_n$ , то семейство  $M$  образует слабое решение уравнения Лиувилля в том и только в том случае, когда  $\pi_t(x)$  является сильным решением уравнения Лиувилля, т. е. (ср. (9.20))

$$\frac{\partial \pi_t(x)}{\partial t} = -SpD_x(\pi_t(x)G(t, x)), \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t \in \Delta. \tag{9.25}$$

Справедливы следующие утверждения [78]:

Для любых  $t^0 \in \Delta$ ,  $\mu^0 \in M_n^+$  и интервала  $\Delta \subseteq \mathbb{R}_1$  слабое решение

$$M = \{\mu_t, t \in \Delta\}$$

уравнения Лиувилля для динамики (9.22) с начальным условием  $\mu^0$  в точке  $t^0$  существует и единственно. Это решение задано соотношением

$$\mu_t(B) = \mu^0(u \in \mathbb{R}_n : x(t, u) \in B), \quad B \in B_n, \quad t \in \Delta, \tag{9.26}$$

и  $\mu_t \in M_n^+$  при всех  $t \in \Delta$ .

Если мера  $\mu^0$  задана непрерывно дифференцируемой плотностью  $\pi^0(u)$ ,  $u \in \mathbb{R}_n$ , и функция  $G \in G$  имеет непрерывные вторые частные производные по  $x$ , ограниченные равномерно по  $x \in \mathbb{R}_n$ ,  $t \in \Delta'$ , где  $\Delta' \subseteq \Delta$  — любой конечный интервал, то функция

$$\pi_t(u) = \pi^0(x^{-1}(t, u))S_t(u), \tag{9.27}$$

где  $x^{-1}(t, \cdot)$  — функция, обратная к  $x(t, u)$ , и  $S_t(u)$  — якобиан преобразования

$$u \rightarrow x^{-1}(t, u),$$

удовлетворяет сильному уравнению Лиувилля (9.25).

**§ 4. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ  
НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИЙ Р. Л. ДОБРУШИНА**

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Власова, описывающего систему частиц взаимодействующих посредством кулоновского потенциала. Отметим, что не возникает принципиальных отличий при рассмотрении более сложной задачи в теории плазмы с учетом электромагнитных полей. Поэтому ограничимся упрощенной постановкой задачи, учитывающей электрическое (или гравитационное) взаимодействие частиц, поскольку это позволяет напрямую воспользоваться приведенным выше результатом Р. Л. Добрушина [78].

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \text{grad}_x v f + \text{grad}_v E f = 0, \\ f(t, x, v)|_{t=0} = f^0(x, v), \end{cases} \quad (9.28)$$

где

$$\begin{cases} E = \text{grad } U, \\ \Delta U = -4\pi e \int_{\mathbb{R}_3} f(t, x, v) dv. \end{cases} \quad (9.29)$$

**Замечание 9.1.** Для построения аппроксимаций ниже вместо уравнений (9.29) будем использовать эквивалентные формулы

$$\begin{cases} E = \text{grad } U, \\ U(x, t) = -4\pi e \int_{\mathbb{R}_3} G(x - y) \int_{\mathbb{R}_3} f(t, y, v) dv dy. \end{cases} \quad (9.29')$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 9.2.** Пусть  $G_\alpha \in C^2(\mathbb{R}_3)$  — регуляризованный кулоновский потенциал взаимодействия частиц такой, что

$$G_\alpha \rightarrow G, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Предположим, что начальные данные  $f^0(x, v)$  — неотрицательная, непрерывно дифференцируемая, суммируемая по  $v$  и  $x$  на  $\mathbb{R}_6$  функция. Тогда

1) существует единственное решение  $f_\alpha(t, x, v)$  регуляризованной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \text{grad}_x v f_\alpha + \text{grad}_v E_\alpha f_\alpha = 0, \\ f_\alpha(t, x, v)|_{t=0} = f^0(x, v), \\ \begin{cases} E_\alpha = \text{grad } U_\alpha, \\ U_\alpha(x, t) = -4\pi e \int_{\mathbb{R}_3} G_\alpha(x - y) \int_{\mathbb{R}_3} f_\alpha(t, y, v) dv dy, \end{cases} \end{cases} \quad (9.30)$$

где «сглаженный» потенциал парного взаимодействия частиц (регуляризованная функция Грина для оператора Лапласа в пространстве  $\mathbb{R}_3$ )  $G_\alpha \in C^2(\mathbb{R}_3)$  имеет вид

$$G_\alpha(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\|x-y\|}, & \|x-y\| > \frac{3}{8\alpha\pi}, \\ -\frac{4}{27\alpha^3(4\pi)^4}\|x-y\|^2 + \alpha, & \|x-y\| \leq \frac{3}{8\alpha\pi}; \end{cases}$$

- 2) при  $\alpha \rightarrow \infty$  существует предел аппроксимаций  $f_\alpha$  в топологии А. Н. Тихонова, являющийся функциональным решением задачи (9.28)–(9.29').

□ Уравнение Власова (9.30) содержит напряженность поля сил  $E_\alpha$ , которая определяется через неограниченный кулоновский потенциал взаимодействия пары частиц  $G(x-y)$ , имеющий особенность при расстоянии между частицами, равном нулю. Поэтому напрямую результаты [78] в этой ситуации не применимы.

Для построения приближенного метода решения задачи Коши для уравнения Власова воспользуемся регуляризацией кулоновского потенциала взаимодействия частиц, предложенной Р. Л. Добрушиным [78]. Если  $U \in C^2(\mathbb{R}_3)$  и начальная функция плотности  $f^0(x, t)$  непрерывно дифференцируемая, то существует функция  $f(t, x, v)$ , удовлетворяющая уравнению Власова.

Решим краевую задачу для уравнения Пуассона (9.29):

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}_3} G(x-y) \left[ -4\pi e \int_{\mathbb{R}_3} f(t, y, v) dv \right] dy,$$

где функция Грина

$$G(x-y) = \frac{1}{4\pi\|x-y\|}, \quad \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}.$$

Пусть положительное число  $\alpha$  — «уровень срезки» для функции Грина  $G$  (кулоновского потенциала парного взаимодействия частиц). Аппроксимируем функцию  $G$  функцией  $G_\alpha \in C^2(\mathbb{R}_3)$  так, что в окрестности нуля  $G_\alpha$  является параболой с вершиной в точке  $(0; \alpha)$ , а вне этой окрестности аппроксимирующая функция совпадает с  $G$  (см. рис. 9.4). Очевидно, что  $G_\alpha \rightarrow G$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  равномерно вне любой открытой окрестности точки  $x = 0$ .

По теореме Р. Л. Добрушина, существует неотрицательное суммируемое на пространстве  $\mathbb{R}_6$  решение  $f_\alpha(t, x, v)$  «сглаженной» задачи (9.30) для уравнения Власова.

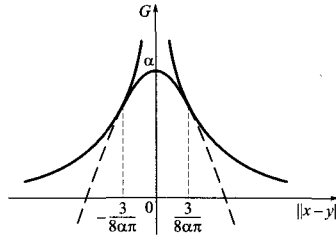


Рис. 9.4. Аппроксимация потенциала парного взаимодействия частиц

Покажем, что предел в тихоновской топологии обобщенной последовательности аппроксимаций  $f_\alpha(t, x, v)$  является функциональным решением задачи Коши для уравнения Власова. Для этого проверим выполнение условия слабой устойчивости и слабой аппроксимации для построенных приближенных задач (9.30).

Свойство слабой устойчивости является непосредственным следствием соотношения сохранения массы:

$$\int_{\mathbb{R}_6} f_\alpha(t, x, v) dx dv = \int_{\mathbb{R}_6} f^0(x, v) dx dv \tag{9.31}$$

(это вытекает из дивергентной формы уравнения Лиувилля в (9.30)), откуда получаем наличие слабой устойчивости рассматриваемого приближенного метода (9.30).

Перейдем к вопросу о наличии слабой аппроксимации для этого метода. Очевидно, что слабая невязка приближенного метода определяется только погрешностью приближения функции Грина  $G$  в интегральной форме уравнения Пуассона на последовательности аппроксимаций  $G_\alpha \rightarrow G$ . Отметим, что уравнение Лиувилля—Власова при этом выполняется точно, и, следовательно, значение слабой невязки  $\delta_\alpha(F)$  равно

$$\begin{aligned} \delta_\alpha(F_{\varphi, g}) &= \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}_3} \int_{\mathbb{R}_3} G_\alpha(x-y) \int_{\mathbb{R}_3} f_\alpha(t, v, y) dv dy g(x, t) dx dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T \int_{\mathbb{R}_3} G(x-y) \int_{\mathbb{R}_3} f_\alpha(t, v, y) dv dy g(x, t) dx dt \right| = \\ &= \left| \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}_3} \int_{\mathbb{R}_3} (G_\alpha(x-y) - G(x-y)) g(x, t) dx \int_{\mathbb{R}_3} f_\alpha(t, y, v) dv \right) dy dt \right|. \end{aligned}$$

Учитывая закон сохранения (9.31), оценим теперь слабую невязку  $\delta_\alpha(F_{\varphi,g})$ :

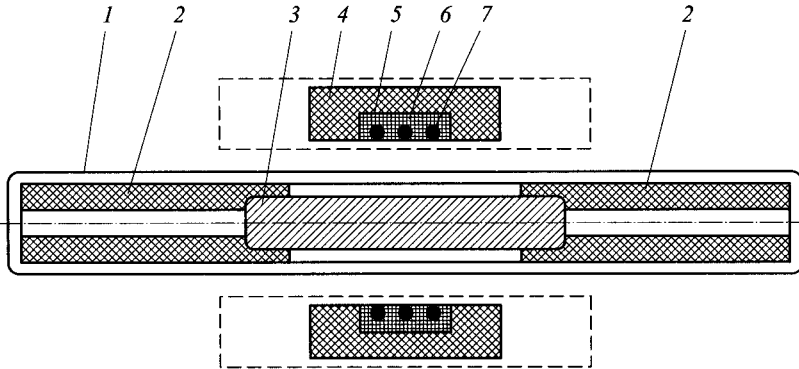
$$\begin{aligned} \delta_\alpha(F_{\varphi,g}) &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}_3} |G_\alpha(x) - G(x)| |g(x,t)| dx dt \leq \\ &\leq T \|g(x,t)\|_\infty \int_{r \leq \frac{3}{2\alpha}} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{r}, \end{aligned}$$

где  $r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$ . Перейдем в подинтегральном выражении к сферическим координатам. Прямым вычислением интеграла убеждаемся, что невязка метода  $\delta_\alpha(F_{\varphi,g}) \rightarrow 0$ , когда  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Итак, условие слабой аппроксимации и условие устойчивости из гл. 2 выполняются, значит предельный образ аппроксимаций принадлежит к классу функциональных решений. ■

## § 5. ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЦЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Обратимся сначала к постановке задачи восстановления границы фазового перехода. Динамика частиц с разрывными полями скоростей и действующих сил, рассмотренная в предыдущих разделах, является прямым аналогом явлений, которые наблюдаются в фазовых переходах, например, в явлении кристаллизации расплава. Известно, что на границе фазового перехода физические характеристики вещества испытывают скачки. Поэтому естественно распространить теорию функциональных решений на математические модели, связанные с описанием фазовых переходов. Большую практическую ценность имеет любая информация о форме и положении фронта кристаллизации. Особенно остро этот вопрос стоит при проведении технологических экспериментов по выращиванию кристаллов в условиях орбитального космического полета методом плавающей зоны. Этот метод применяется для выращивания высококачественных кристаллов и рассматривается как один из перспективных для использования в условиях космического пространства. Метод плавающей зоны состоит в следующем. Кварцевая ампула, содержащая поликристалл какого-либо материала, медленно протягивается мимо нагревательного элемента, в результате чего происходит процесс перекристаллизации. Для получения качественного монокристалла необходимо следить, чтобы расплавляемая «зона» была минимальной, так как это уменьшает вредные конвективные течения в расплаве. В то же время существует опасность схлопывания «зоны», когда



**Рис. 9.5.** Схема натурной ампулы с нагревателем установки «Зона-01». 1 — кварцевая ампула; 2 — графитовые излучатели; 3 — переплавляемый образец; 4 — теплоизоляция нагревателя; 5 — корпус нагревателя; 6 — штатная терморпара; 7 — нагревательный элемент

фронты кристаллизации и расплавления соприкасаются. Управляют этим процессом, изменяя скорость протягивания ампулы и мощность нагревателя. Таким образом, практическое использование метода требует тщательной проработки важных аспектов технологического процесса таких, как величины градиентов температур, возникающих в кристалле, формы и поведение зоны расплава в зависимости от подводимой мощности и скорости передвижения ампулы относительно нагревателя.

На рис. 9.5 изображена схема бортовой технологической установки «Зона-01», где реализуется процесс выращивания монокристаллов полупроводниковых материалов методом зонной плавки в условиях микрогравитации. На этой установке был проведен ряд экспериментов по космическому материаловедению на спутниках серии «Фотон» и орбитальной станции «Мир».

В результате этих экспериментов в условиях микрогравитации были получены кристаллы германия, антимонида индия, антимонида галлия диаметром 15–20 мм и длиной 60 мм.

Технологический эксперимент осуществляется следующим образом: заготовка диаметром 15–20 мм и длиной 110 мм помещается в кварцевую ампулу с внешним диаметром 30 мм. Внутри ампулы образец удерживается с помощью графитовых вставок, длиной 60 мм и имеющих сложную форму. Заготовка прогревается до образования зоны проплавления, выдерживается некоторое время, после чего на-

чинается движение ампулы с определенной скоростью относительно неподвижного нагревателя.

При помощи метода, описанного в предыдущей главе, можно приближенно найти значения температур в обеих фазах вещества. Дальнейшее точное восстановление поверхности фазового перехода осуществляется на основании решения следующего дифференциального уравнения:

$$\Phi_t(x, t) + (k_1 \operatorname{grad} U^{(1)} - k_2 \operatorname{grad} U^{(2)}, \operatorname{grad} \Phi) = 0, \quad (9.32)$$

где  $k_1 = \operatorname{const} > 0$ ,  $k_2 = \operatorname{const} > 0$ ,  $\Phi(x, t) = 0$  — уравнение поверхности фазового перехода,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ .

Подставляя в полученное равенство значение  $x_t$  из классического условия Стефана, приведенного в гл. 1, получаем уравнение (9.32). Уравнение (9.32) для поля скоростей с нулевой дивергенцией эквивалентно следующему уравнению Лиувилля, рассмотренному выше:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V\Phi) = 0, \quad (9.33)$$

где  $V$  — скорость фронта кристаллизации по направлению вдоль нормали к фронту кристаллизации, причем очевидно, что в общем случае она не обладает свойством гладкости. Как правило, динамика растущего кристалла приводит к образованию дендритной структуры, являющейся многообразием с точками самопересечения. Отметим, что с производственной точки зрения кристаллы с дендритной структурой являются браком. Например, их использование в микроэлектронике не является возможным. Поэтому важны методы управления ростом кристалла, приводящие к регулярным поверхностям фазового перехода. Это существенно для решения важнейшей проблемы — уменьшения количества дефектов в единице объема кристалла, так как последнее играет самую существенную роль в определении его ценности для производственных нужд.

Как видно из уравнения (9.33), расчет поверхности фазового перехода можно вести зная только скорость кристаллизации. Современные средства ультразвукового зондирования позволяют измерять эту скорость непосредственно во время ростового эксперимента. Таким образом, предлагаемый алгоритм по нахождению поверхности фазового перехода может быть использован при оперативном управлении параметрами эксперимента на основании данных измерения скорости фронта кристаллизации.

Для приближенного решения уравнения (9.33) используем метод исчезающей вязкости [141], на основании решения следующих ап-

проксимирующих задач:

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V\Phi_\alpha) = \alpha \Delta \Phi_\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (9.34)$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0. \quad (9.35)$$

Физическая интерпретация такого подхода обусловлена введением в поле скоростей эволюции фронта фазового перехода  $V$  «малого» броуновского блуждания, которое возникает из-за турбулентных флуктуаций на границе раздела фаз.

Рассмотрим пример одномерного уравнения по пространственным координатам  $x$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(V(x,t)\Phi)}{\partial x} = \mu^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9.36)$$

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad (9.37)$$

причем потребуем, чтобы выполнялось условие ограниченности начальных данных:  $\Phi_0 \leq M$ , где  $M$  — некоторая неотрицательная постоянная.

Доказательство проведем, предполагая, что скорость фронта  $V$ , разделяющего две фазы вещества, является ограниченной и измеримой функцией  $|V| \leq C_V$ , где  $C_V$  — некоторая неотрицательная постоянная.

Задачу (9.36), (9.37) запишем в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \Phi_0(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} (V(\xi, \tau) \Phi(\xi, \tau)) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\mu\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4\mu^2 t}\right)$$

— функция Грина для уравнения теплопроводности.

Получим сначала априорные оценки функции  $\Phi$ , предполагая ее ограниченность:  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T} |\Phi| < \infty$  на рассматриваемом отрезке



времени  $[0, T]$ . Справедливо неравенство

$$|\Phi(x, t)| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\mu\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu^2 t}\right) d\xi + \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} (V(\xi, \tau)\Phi(\xi, \tau)) d\xi d\tau \right|.$$

В первом интеграле делаем замену переменных

$$z = \frac{\xi - x}{2\sqrt{\mu^2 t}},$$

а второй преобразуем интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} |\Phi(x, t)| &\leq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-z^2) dz + \\ &\left| \int_0^t V(\xi, \tau)\Phi(\xi, \tau) \frac{1}{2\mu\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu^2(t-\tau)}\right) d\tau \right|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} - \\ &- \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} V(\xi, \tau)\Phi(\xi, \tau) \frac{2(x-\xi)}{8\mu^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu^2(t-\tau)}\right) d\xi d\tau \left| \leq \right. \\ &\leq M + C_V \left| \int_0^t \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\Phi| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)}{4\mu^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu^2(t-\tau)}\right) d\xi d\tau \right|, \\ &0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем интегральное неравенство

$$|\Phi(x, t)| \leq M + \frac{C_V}{\mu\sqrt{\pi}} \int_0^t \sup_{\mathbb{R}} |\Phi| \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Обозначим

$$u(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi(x, t)|.$$

Так как предыдущая оценка справедлива для  $\forall x, t$ , то выполнено следующее неравенство:

$$u(t) \leq M + \frac{C_V}{\mu\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Решая это интегральное неравенство, найдем априорную оценку сверху функции  $|\Phi|$  в классе ограниченных измеримых функций.

Рассмотрим следующее отображение

$$A: C_{[0,T]} \rightarrow C_{[0,T]}$$

на множестве непрерывных функций  $C_{[0,T]}$ , определенных на отрезке времени  $0 \leq t \leq T$ :

$$A(u) = M + C \int_0^t \frac{u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad C = \frac{C_V}{\mu\sqrt{\pi}} \geq 0.$$

Оператор  $A$  является монотонно возрастающим, а его степени — сжимающие операторы на пространстве непрерывных функций  $C_{[0,T]}$ , определенных на отрезке времени  $[0, T]$ . Таким образом, существует непрерывная неотрицательная функция  $\bar{u} = A(u)$ , которая оценивает сверху решения неравенства  $u \leq A(u)$  на пространстве  $C_{[0,T]}$ . Применяя преобразование Лапласа по неотрицательным значениям времени [77], имеем  $\bar{u} \mapsto \bar{U}$ , где  $\bar{U}$  — образ Лапласа для функции  $\bar{u}$ :

$$\bar{U}(P) = \frac{M}{\sqrt{P}(\sqrt{P} - C)}.$$

Таким образом,

$$\bar{u}(t) = M \exp(C^2 t) \operatorname{erfc}(-C\sqrt{t}),$$

где  $\operatorname{erfc}$  — функция ошибок.

Следовательно, используя монотонность оператора  $A$ , получаем априорную оценку решения в классе ограниченных непрерывных функций:

$$|\Phi| \leq \bar{u}(t) = M \exp(C^2 t) \operatorname{erfc}(-C\sqrt{t}).$$

Эта априорная оценка гарантирует существование и единственность решения рассматриваемой задачи Коши.

Рассмотрим отображение

$$S(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t + t_+) \Phi_0(\xi) d\xi + \int_{t=-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t + t_- - \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} (V(\xi, \tau) \Phi(\xi, \tau)) d\xi d\tau,$$

$$S: U_{[a,b]} \rightarrow U_{[a,b]},$$

где  $U_{[a,b]}$  — множество ограниченных непрерывных функций на прямоугольнике  $(x, t): x \in \mathbb{R}, a \leq t \leq b$ :

$$U_{[a,b]} = \left\{ \varphi \in C: \sup_{t \in [a,b]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x, t)| < \infty \right\}.$$

**Лемма 9.1.** При достаточно малых значениях  $b - a > 0$  отображение  $S$  является сжимающим на множестве  $U_{[a,b]}$ .

**Теорема 9.3 (локальная теорема существования и единственности решения).** Решение задачи (9.36), (9.37) существует и единственно, когда значения времени  $t \in [a, b]$ .

□ Отображение

$$S: U_{[a,b]} \rightarrow U_{[a,b]}$$

сжимающее, пространство  $U_{[a,b]}$  — полное нормированное. По теореме о сжимающем отображении [94] существует единственная неподвижная точка  $\Phi$  у отображения  $S, \Phi = S(\Phi)$ . Таким образом,  $\Phi$  является решением задачи (9.36), (9.37). ■

**Теорема 9.4 (глобальная теорема о существовании и единственности решения).** Решение задачи (9.36), (9.37) существует, единственно в классе ограниченных непрерывных функций на любом отрезке  $[0, T]$  неотрицательных значений времени.

Доказательство этого утверждения является прямым следствием априорной оценки ограниченных непрерывных решений и сжатости достаточно больших степеней оператора  $S$ .

Эти построения без существенных изменений распространяются на многомерный по пространственным переменным случай.

Обратимся к исследованию сходимости приближенного метода (9.34), (9.35). Для обоснования сходимости воспользуемся теоремой 2.1. Поскольку начальная функция  $\Phi_0 \leq M$ , то при каждом значении параметра  $\alpha > 0$  задача (9.34), (9.35) имеет гладкое решение, которое удовлетворяет требованию равномерной локальной суммируемости на каждом компакте  $K \subset \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_1^+$ . Следовательно, для некоторой обобщенной подпоследовательности  $\alpha_k \rightarrow 0$  приближения  $\Phi_{\alpha}$  сходятся к функциональному решению задачи (9.33), (9.35).

Определение функционального решения (9.33), (9.35) приведено в гл. 2.

Для численного решения уравнения (9.34) обычно пользуются методом Галёркина, весьма популярным в теплофизических расчетах. Выберем какую-либо полную в пространстве С. Л. Соболева  $W_2^1$

систему финитных функций  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Множество пробных функций  $\varphi$ , определяющих обобщенное решение задачи (9.33), (9.35), будем полагать конечными линейными комбинациями выбранной полной системы.

Приближенное решение будем искать в виде

$$\Phi^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \psi_k,$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \Phi^N}{\partial t} \psi_k - V \Phi^N \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \mu^2 \frac{\partial \Phi^N}{\partial x} \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right] dx = 0, \quad (9.38)$$

$$\int_{\Omega} (\Phi^N(x, 0) - \Phi_0(x)) \psi_k(x) dx = 0$$

при  $k = 1, \dots, N$ .

По построению метод Галёркина (9.38) обладает свойством слабой аппроксимации на выбранном векторном пространстве пробных функций.

В [107] доказана сходимость метода (9.38) к решению  $\Phi^\alpha$  задачи (9.34), (9.35), принадлежащему пространству  $V_2(Q_T)$  при условии, что  $\Phi_0 \in L_2(\Omega)$ . Таким образом, метод Галёркина обладает свойством слабой устойчивости. Здесь  $Q_T = \Omega \times [0, T]$ ,  $V_2(Q_T)$  — банахово пространство, состоящее из всех элементов  $W_2^{1,0}(Q_T)$ , имеющих конечную норму

$$\|u\| = \text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{2, \Omega} + \|u_x\|_{2, Q_T},$$

где

$$\|u\|_{2, \Omega} = \left( \int_{\Omega} (u(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|u_x\|_{2, Q_T} = \left( \int_{Q_T} u_x^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

Норма в пространстве  $L_{q,r}(Q_T)$  определяется следующим соотношением:

$$\|u\|_{q,r,Q_T} = \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}.$$

Поскольку метод (9.38) обладает слабой устойчивостью и слабой аппроксимацией, обоснована математическая корректность модели для нахождения фронта кристаллизации. На основе метода

Галёркина построен численный метод восстановления границы фазового перехода и обоснована его сходимости.

## § 6. КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ОБЪЕМНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

При полном математическом моделировании процессов тепло- и массопереноса в задаче описания процессов кристаллизации вещества возникают значительные трудности из-за того, что на течение расплава влияет тонкий слой между твердой и жидкой фазами вещества. Этот слой не является ни жидкостью, ни твердым телом и поэтому все его физические свойства не определены. Предлагаемая математическая модель описывает поведение такого слоя на основании гипотезы, что он состоит из частичек, зародышей кристаллизации (твердой фазы вещества) и переохлажденного расплава (жидкой фазы).

Рассмотрим в ограниченном объеме механическую смесь частичек и расплава. При построении математической модели будем учитывать следующие предположения физического характера:

- 1) частиц достаточно большое число, чтобы можно было применить функцию распределения числа частиц по массам;
- 2) частицы системы образуют хаотическое множество.

Состояние такой системы в каждый момент времени  $t$  описывается плотностью вероятности распределения частиц  $f(m, t)$  по массам  $m$ . В начальный момент времени состояние системы задается плотностью вероятности распределения  $f_0$ . Новые частицы могут поступать в нашу систему за счет источника, который действует с интенсивностью  $q(m, t)$ . На практике источником может быть, например, неоднородность среды. То есть, если мы помещаем в нашу систему ионы какого-либо вещества, на них немедленно конденсируется расплав и образуются новые частицы. Функция  $\Phi$  — это интенсивность столкновений частиц.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} + \frac{\partial \dot{m} f(m, t)}{\partial m} = -\frac{1}{2} f(m, t) \int_0^{\infty} \Phi(m, y) f(y, t) dy + q(m, t),$$

$$m > 0, \quad t > 0,$$

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(m, y) |f(y, t)| y dy, \quad f(0, t) \equiv 0. \quad (9.39)$$

Гипотезы, на основе которых написано уравнение (9.39), предполагают рост кристаллической фазы при парных взаимодействиях микрокристаллов аналогично теории коагуляции М. Смолуховского. При этом принимается модель непрерывного роста микрокристаллов, приводящая к аналогу теории самосогласованного поля А. А. Власова. Условие  $f(0, t) \equiv 0$  предполагает отсутствие в расплаве зародышей нулевой массы. Конечно, это условие может быть обобщено на ненулевые значения  $f(0, t)$ , когда в систему доставляются зародыши кристаллизации за счет внешних воздействий.

Обратимся к интерпретации математической модели. Рассмотрим пробную частицу, которая проходит через расплав. Во время этого прохождения масса частицы увеличивается за счет ее движения в спектре. Это отражает второе слагаемое в левой части уравнения (9.39). Это слагаемое соответствует подходу А. А. Власова динамики плазмы в самосогласованном поле парного потенциала, рассмотренному выше. Но в отличие от этой модели здесь учитываются процессы «гибели» частиц. В процессе взаимодействия пробная частица при столкновении может либо погибнуть, либо поглотить частицу, с которой она столкнулась. Интенсивность гибели частиц спектра отражает первое слагаемое в правой части уравнения (9.39).

Таким образом, рассматриваемая модель кристаллизации описывается уравнением (9.39), которое является уравнением Лиувилля для системы частиц, где учитывается их гибель.

Для уравнения (9.39) зададим начальное условие:

$$f|_{t=0} = f_0 \geq 0. \quad (9.40)$$

Считаем, что интенсивность столкновений частичек  $\Phi(m, y)$  является гладкой функцией и  $0 \leq \Phi(m, y) = \Phi(y, m) < \infty$ . Функция источника частиц  $q(m, t) \geq 0$  является непрерывной и ограниченной.

### § 7. ОБОСНОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ (9.39), (9.40)

Решение задачи (9.39), (9.40) построим методом характеристик. Вдоль характеристик уравнения (9.39) имеем:

$$\frac{df}{dt} = -\gamma f + q, \quad (9.41)$$

где

$$\gamma(f) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial m} \int_0^{\infty} \Phi(m, y) f(y, t) y dy + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(m, y) f(y, t) dy,$$

а уравнение характеристик имеет вид

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(m, y) |f(y, t)| y dy.$$

Отсюда следует, что задача (9.39), (9.40) может быть записана в виде интегрального соотношения вдоль характеристик  $m(\tau)$ , выпущенных назад из точки  $(m, t)$ :

$$f(m, t) = \tilde{f}_0 \exp \left[ - \int_{t_0}^t \gamma(f) d\tau \right] + \int_{t_0}^t \exp \left[ - \int_{\tau}^t \gamma(f) ds \right] q(m(t - \tau), \tau) d\tau, \tag{9.42}$$

где  $t_0$  равно моменту времени выхода характеристики «назад», выпущенной из точки  $(m, t)$ , на линию

$$m = 0; \quad t_0 = 0,$$

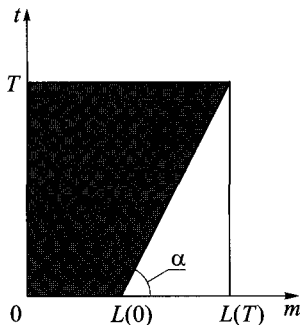


Рис. 9.6. Форма носителя функций  $f \in B_T^+(R)$

если характеристика «назад» пересекает линию  $t = 0$  при некотором неотрицательном значении  $m$ ;  $\tilde{f}_0$  обращается в ноль для характеристик, пересекающих линию  $m = 0$ , а в случае пересечения характеристикой линии  $t = 0$ , полагаем

$$\tilde{f}_0 = f_0.$$

Для гладкого сопряжения начальных и краевых данных будем в дальнейшем предполагать, что  $f_0(0) = 0$  вместе со своими производными, количество которых определяется классом гладкости решения  $f$  по переменным  $m, t$ . Обозначим

$B(R)$  класс неотрицательных непрерывных функций  $C$ , принадлежащих при  $0 \leq t \leq T$  шару

$$B_T^+(R) = \{f \in C, f \geq 0, \|f\|_C \leq R, R > 0\},$$

носитель которых заключен внутри трапеции (закрашена черным цветом), изображенной на рис. 9.6:

$$0 < \operatorname{tg}(\alpha) \leq \frac{2}{\|\Phi\|_C R L^2(T)},$$

где

$$L(T) \geq \max\{m : m \in \text{supp } f(., t), 0 \leq t \leq T\}$$

(здесь «supp» — носитель функции).

Рассмотрим отображение  $A : B_T^+(R) \rightarrow C^{(T)}$ , порожденное правой частью уравнения(9.42):

$$\begin{aligned} A(f) = & \tilde{f}_0 \exp \left[ - \int_{t_0}^t \gamma(f) d\tau \right] + \\ & + \int_{t_0}^t \exp \left[ - \int_{\tau}^t \gamma(f) ds \right] q(m(t - \tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \tag{9.43}$$

**Лемма 9.2.** Пусть  $\tilde{f}_0$  и  $q$  являются гладкими финитными функциями. Тогда можно указать такое достаточно малое положительное число  $T(R)$ , что для всех  $f \in B_T^+(R)$  отображение  $A$  оставляет носитель функции  $A(f)$  в трапеции, изображенной на рис. 9.6.

**Лемма 9.3.** Справедлива оценка

$$\|\gamma\|_C \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial m} \right\|_C M(t) + \frac{1}{2} \|\Phi\|_C N(t),$$

где  $M(t)$  — плотность массы частиц в системе,  $N(t)$  — плотность числа частиц в системе.

□ Выполнено следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_C \leq & \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial m} \right\|_C \int_0^\infty f(y, t) y dy + \frac{1}{2} \|\Phi\|_C \int_0^\infty f(y, t) dy = \\ & = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial m} \right\|_C M(t) + \frac{1}{2} \|\Phi\|_C N(t). \end{aligned}$$

■

**Лемма 9.4.** Пусть  $\tilde{f}_0$  и  $q$  являются гладкими финитными неотрицательными функциями. Тогда можно указать такое достаточно малое положительное число  $T(R)$ , что при условии  $\|f_0\|_C, \|q\|_C \leq C_1 < R$ , отображение  $A$  переводит множество  $B_T^+(R)$  в себя.

□ Из соотношения (9.43) получаем:

$$\|A(\varphi)\|_C \leq C_1 \left( \exp \left[ - \int_0^t \gamma(\varphi) d\tau \right] + \int_0^t \exp \left[ - \int_{\tau}^t \gamma(\varphi) ds \right] d\tau \right). \tag{9.44}$$



Из леммы 9.3 следует, что при значениях  $0 \leq t \leq T(R)$  выполняется неравенство:

$$\|\gamma\|_C \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial m} \right\|_C M(t) + \frac{1}{2} \|\Phi\|_C N(t) \leq K(R),$$

где  $K(R)$  — положительная постоянная.

При  $0 \leq t \leq T$  имеем:

$$\exp \left[ - \int_0^t \gamma(\varphi) ds \right] \leq \exp \left[ \int_0^T \|\gamma(\varphi)\|_C ds \right] \leq \exp(KT),$$

и при  $0 \leq \tau \leq T$  имеем:

$$\exp \left[ - \int_\tau^t \gamma(\varphi) ds \right] \leq \exp \left[ \int_0^T \|\gamma(\varphi)\|_C ds \right] \leq \exp(KT).$$

Следовательно, с учетом неравенства (9.44) и требования инвариантности множества  $B_T^+(R)$  для отображения  $A$  получаем:

$$\|A(f)\|_C \leq C_1 (\exp(KT) + T(KT)) \leq R.$$

Учитывая, что  $C_1 < R$ , отыскиваем искомое число  $T(R) > 0$ . Лемма доказана. ■

**Лемма 9.5.** *Отображение  $A(\varphi)$  является сжимающим на множестве  $B_T^+(R)$  при достаточно малом положительном значении  $T(R)$ .*

Утверждение леммы получается аналогично доказательству предыдущей леммы с использованием свойства локальной Липшиц-непрерывности оператора  $A$  в равномерной метрике и пропорциональности постоянной Липшица величине  $T > 0$ . Таким образом, выбирая достаточно малое  $T > 0$ , обеспечиваем сжатость отображения  $A$  на множестве  $B_T^+(R)$ .

На основании ряда этих априорных оценок для задачи (9.3) можно доказать следующую теорему.

**Теорема 9.5.** *Пусть  $\tilde{f}_0$ ,  $\Phi$  и  $q$  являются гладкими финитными неотрицательными функциями  $0 \leq t \leq T$ . Тогда существует единственное гладкое неотрицательное решение задачи (9.39), (9.40) при  $0 \leq t \leq T$ , где  $T$  — достаточно малое положительное число, зависящее от нормы исходных данных в пространстве ограниченных функций.*

□ Из леммы 9.5 получаем, что  $A$  — сжимающее отображение. Следовательно, по теореме о неподвижной точке существует единственное

решение уравнения  $f = A(f)$ . Таким образом, при  $0 \leq t \leq T$  выполняется тождество (9.42), то есть  $f$  — решение задачи (9.42). Учитывая гладкость исходных данных, требования на гладкое сопряжение начальных краевых условий, применяя непосредственное дифференцирование в (9.42), получаем справедливость (9.39), (9.40). Таким образом, теорема доказана. ■

**Теорема 9.6 (продолжение локального решения).** Пусть  $\tilde{f}_0$ ,  $\Phi$  и  $q$  являются гладкими финитными неотрицательными функциями. Тогда решение задачи (9.39), (9.40) существует и единственно при всех  $t \geq 0$ .

□ Из теоремы 9.4 вытекает, что рассматриваемым неотрицательным исходным данным соответствует неотрицательное локальное решение. Покажем теперь, что локальное решение ограничено. Из уравнения (9.39) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial \dot{m} f}{\partial m} m \, dm &= m \dot{m} f|_0^\infty - \int_0^\infty \dot{m} f \, dm = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(m, y) f(y, t) y \, dy f(m, t) \, dm. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая ограниченность нормы  $q$ , из (9.39) имеем:

$$\dot{M}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty f(m, t) m \, dm = \int_0^\infty q(m, t) m \, dm \leq K_1.$$

Решая эту задачу с начальным условием  $M(0) = M_0 \geq 0$ , получаем, что  $M(t) \leq K_2 t + M_0$ .

Аналогично получаем

$$\dot{N}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty f(m, t) \, dm \leq \int_0^\infty q(m, t) \, dm \leq K_2.$$

Значит,  $N(t) \leq K_2 t + N_0$ , где  $N(0) = N_0 \geq 0$ .

Положим в качестве новой начальной функции

$$f_0^\delta(m) = f(m, T - \delta),$$

где  $\delta$  — достаточно малое положительное число. В силу приведенных неравенств для  $N(t)$  и  $M(t)$  семейство функций  $f_0^\delta$  является равномерно финитным и ограниченным при  $\delta \rightarrow 0+$ . Следовательно, применяя теорему 9.4, можно продолжить решение на значения

времени, превосходящие время существования локального решения. Тем самым, расширяем интервал существования решения на все неотрицательные значения времени. Действительно, пусть  $T^* = \sup$  (всех времен, до которых построено решение). При  $0 \leq t < T^*$  решение существует и единственно, оно ограничено и неотрицательно. Следовательно, выбрав начальную функцию

$$f_0^\delta(m) = f(m, T^* - \delta),$$

мы можем продолжить за счет малости числа  $\delta$  построенное решение на значения времени, превосходящие  $T^*$ . Значит  $T^* = +\infty$ .

Теорема доказана. ■

Ниже приведем пример частного решения уравнения (9.39).

Рассмотрим стационарное уравнение с ядром  $\Phi(x, y) = 1$  и найдем его асимптотику.

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} f(x) \int_0^\infty f(y) y dy + \frac{1}{2} f(x) \int_0^\infty f(y) dy - q(x) = 0. \quad (9.45)$$

Запишем это уравнение в другом виде:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} f(x) M + \frac{1}{2} f(x) N - q(x) = 0.$$

Решение этого уравнения можно записать в явном виде:

$$f(x) = \left[ \frac{2}{M} \int_0^x q(s) \exp \left[ \frac{N}{M} s \right] ds \right] \exp \left[ -\frac{N}{M} x \right] + C_0 \exp \left[ -\frac{N}{M} x \right].$$

## § 8. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для приближенного решения задачи (9.39), (9.40) использовался явный разностный метод с запаздыванием на шаг по времени при вычислении скорости роста пробной частицы

$$\dot{m}(m, t_k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi(m, y) |f(y, t_{k-1})| y dy,$$

при этом интеграл по массовой переменной заменялся римановой суммой на равномерной сетке по массам. В силу финитности на-

чальных данных эти суммы конечные на каждом шаге по времени:

$$\begin{aligned} & \frac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[ f_m^n \sum_{k \geq 0} \Phi(m\Delta m, k\Delta m) f_k^n k - \right. \\ & \left. - f_{m-1}^n \sum_{k \geq 0} \Phi((m-1)\Delta m, k\Delta m) f_k^n k \right] = \\ & = -\frac{\Delta m}{2} f_m^n \sum_{k \geq 0} \Phi(m\Delta m, k\Delta m) f_k^n, \quad f_0^n = 0, \\ & 0 \leq n \leq \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil, \quad m \geq 0. \end{aligned} \tag{9.46}$$

**Теорема 9.7.** Пусть в разностном методе (9.46) начальные данные  $f_k^0 \geq 0$  суммируемы по аргументу  $k \geq 0$ , а ядро  $\Phi \geq 0$  — ограниченная функция. Пусть шаги сетки подчинены условию Куранта

$$-\frac{1}{2} \tau \Delta m \sup \Phi \left[ \sum_{k \geq 0} f_k^0 + \frac{1}{\Delta m} \sum_{k \geq 0} k f_k^0 \right] \geq 0. \tag{9.47}$$

Тогда решение разностной схемы (9.46) неотрицательно и справедливо соотношение (диссипации концентрации и сохранения массы):

$$\sum_{k \geq 0} f_k^n \leq \sum_{k \geq 0} f_k^0, \quad \sum_{k \geq 0} k f_k^n = \sum_{k \geq 0} k f_k^0, \quad n \geq 0. \tag{9.48}$$

Если при этом выполнены условия теоремы 9.5, то разностная схема (9.46), (9.47) аппроксимирует задачу (9.39), (9.40) с первым порядком аппроксимации и сходится в равномерной метрике с первым порядком точности.

Доказательство теоремы 9.6 получается методом математической индукции по номеру  $n \geq 0$ .

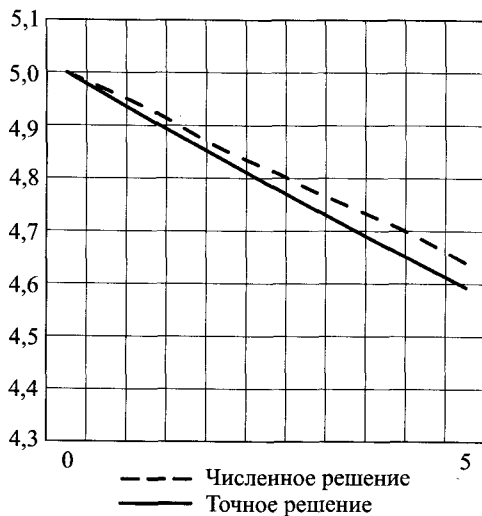
Для тестирования компьютерной программы, реализующей явный разностный метод (9.46), были использованы точные решения задачи Коши (9.39)–(9.40).

Рассмотрим уравнение (9.39). Положим  $\Phi \equiv 1, q \equiv 0$ . Используя метод характеристик, получаем:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2} f N(t); \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} M(0),$$

где  $N(t)$  — концентрация частиц системы в момент времени  $t$ ,

$$N(t) = \int_0^{\infty} f(x, t) dx;$$

Рис. 9.7. Тестовый расчет для функции  $N(t)$ 

$M(t)$  — средняя масса частиц системы в момент времени  $t$ ,

$$M(t) = \int_0^{\infty} f(x, t)x dx.$$

Легко найти, что

$$x(t) = \frac{1}{2}M(0)t + x(0).$$

Используя уравнение (9.39) и свойство финитности функции  $f$ , можно получить следующее соотношение:

$$N(t) = \frac{2N(0)}{2+t}.$$

Таким образом, получаем искомое точное решение

$$f(x, t) = \tilde{f}_0 \left( x - \frac{1}{2}M(0)t \right) \frac{2N(0)}{2+t},$$

где  $\tilde{f}_0(x) = 0$  при  $x \leq 0$  и  $\tilde{f}_0(x) = f_0(x)$  при  $x \geq 0$ .

На рис. 9.7 представлен пример тестового расчета методом Галёркина для этого примера.

## ДОПОЛНЕНИЕ. СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, ТОПОЛОГИИ И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Эта глава содержит сводку основных сведений из теории множеств и топологии, в той или иной степени используемых в математических построениях, связанных с обобщенными и функциональными решениями систем законов сохранения. Формулировки утверждений и определения в основном соответствуют книгам [75, 183], а также учебникам [94, 139].

### § 1. МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ

Далее используются следующие понятия: *класс, множество, пространство, семейство, совокупность, элемент, точка*.

Проблемы, связанные с непротиворечивостью построений, приводят к необходимости различать два типа совокупностей. Более общий — *класс*. Термин *множество* сохраняется за теми из классов, которые могут быть элементами классов. Нетривиальность понятия класса следует из следующего важного утверждения: класс всех множеств не является множеством. Поскольку на протяжении этой книги (при единственном вышеупомянутом исключении) все используемые классы одновременно являются множествами, то без ограничения общности можно считать синонимами *класс, множество, пространство, семейство, совокупность*. Неопределяемыми также понятиями являются синонимы *элемент, точка*. Разделение всевозможных мыслимых совокупностей на множества и классы, не являющиеся множествами, позволяет избежать широко известных парадоксов, возникших в «наивной» теории множеств, созданной в конце XIX века Георгом Кантором<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup>Георг Кантор (3.3.1845–6.1.1918) — великий немецкий математик, создатель теории множеств. Родился в Петербурге. Кантор разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел; доказал несчетность множества всех действительных чисел (1874), сформулировал общее понятие мощности множества (1878) и развил принципы сравнения мощностей. Канторовская теория множеств послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю структуру современной математики. Работам Кантора предшествовали основополагающие труды Больцано, а также Вейерштрасса, Коши, Дедекинда и Мерэ (см. [140]).

**Отношения.** Понятие *отношения* является центральным, так как позволяет определить остальные понятия через понятие множества. В частности, это относится к понятиям упорядочения и функции.

Предположим, что задано некоторое отношение (в интуитивно ясном смысле) между определенными парами объектов. Это отношение реализуем в виде множества всех пар связанных им объектов. Например, множество пар, состоящих из чисел и их квадратов, естественно именовать квадратической зависимостью, графиком квадратической функции.

**Определение 10.1.** Назовем *декартовым произведением*  $A \times B$  множеств  $A$  и  $B$  множество

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

**Определение 10.2.** Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные непустые множества. Отношением на множестве  $A \times B$  называется подмножество  $R \subset A \times B$ . Если пара  $(x, y) \in R$ , то будем говорить, что элементы  $x$  и  $y$  находятся в отношении  $R$ , и писать  $xRy$ . Обратное отношение  $R^{-1}$  к отношению  $R$  получается изменением порядка в каждой из пар отношения  $R$ :

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}.$$

Область определения отношения  $R$  имеет вид

$$\{x : \text{для некоторого } y (x, y) \in R\}.$$

Область значений отношения  $R^{-1}$  имеет вид

$$\{y : \text{для некоторого } x (x, y) \in R\}.$$

Пусть  $R$  — отношение и  $A$  — некоторое множество. Назовем множество  $R(A)$  *образом* множества  $A$  под действием отношения  $R$  множество точек  $y$  таких, что  $yRx$  для некоторого  $x \in A$ .

Композицией отношений  $R$  и  $S$  называется отношение  $R \circ S$ , состоящее из всех пар  $(x, z)$  таких, что  $(x, y) \in S$  и  $(y, z) \in R$ .

Пусть  $R, S, T$  — отношения,  $A$  — непустое множество индексов  $a$ , для каждого из которых определено множество  $X_a$ . Тогда выполнены следующие соотношения:

- (1)  $(R^{-1})^{-1} = R, (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ .
- (2)  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ .
- (3)  $(R \circ S)(A) = R(S(A))$  для каждого множества  $A$ .
- (4)  $R(\cup\{X_a : a \in A\}) = \cup\{R(X_a) : a \in A\}$ .
- (5)  $R(\cap\{X_a : a \in A\}) \subset \cap\{R(X_a) : a \in A\}$ .

Отношение на множестве  $P \times P$ , состоящее из всех пар  $(x, x)$ ,  $x \in P$ , назовем *диагональю* или *тождественным отображением*. Отношение на  $P \times P$  называется *рефлексивным*, если оно содержит диагональ. Если же из  $xRy$  и  $yRx$  следует  $x = y$ , то отношение  $R$  назовем *антисимметричным*. Если из  $xRy$  следует  $yRx$ , то отношение  $R$  назовем *симметричным*. Отношение  $R$  на множестве  $P \times P$  назовем *транзитивным*, если  $xRy$  и  $yRz$  влечет  $xRz$ .

**Эквивалентность.** Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве  $P \times P$  называется *отношением эквивалентности* или *эквивалентностью*. Эквивалентности играют важнейшую роль во всех разделах математики, так как они связаны с разбиениями множества  $P$  на классы эквивалентности, которые состоят из попарно непересекающихся подмножеств (т. е. имеющих пустое пересечение).

**Функция.** Функция — это такое отношение  $F$ , что из  $xFy$  и  $xFz$  следует  $y = z$ . В этой книге функция по определению совпадает с ее *графиком*  $F$ . Слова *соответствие*, *отображение*, *оператор*, *преобразование* означают то же, что понятие функции. Примем правило, по которому точку  $y$ , для которой справедливо  $xFy$ , будем обозначать  $y = F(x)$ , называя  $x$  аргументом, а  $F(x)$  — значением функции в точке  $x$ . Иногда используется символ  $x \mapsto F(x)$  —  $x$  переходит в  $F(x)$ . Отображение  $F$ , определенное на множестве  $A$  со значениями во множестве  $B$ , принято записывать в следующем виде:

$$F: A \rightarrow B.$$

*Образом* множества  $A$  при отображении  $F$  называется множество точек  $y = F(x)$ , когда аргумент  $x$  пробегает все значения во множестве  $A$ .

*Полным прообразом*  $F^{-1}(A)$  множества  $A$  при отображении  $F$  называется множество всех аргументов  $x$ , при которых значения  $F(x)$  принадлежат множеству  $A$ .

Множество  $A$  называется *инвариантным* для отображения  $F$ , если  $F(A) \subset A$ . Если инвариантное множество состоит из одной точки, то она называется *неподвижной точкой* отображения  $F$ .

Функция  $F$  называется *продолжением* функции  $G$ , а  $G$  — *сужением* отображения  $F$ , если область определения функции  $F$  содержит область определения функции  $G$  и при этом  $F(x) = G(x)$  для всех  $x$  из области определения  $G$ .

Если обратное отношение  $F^{-1}$  к функции  $F$  также является функцией, то  $F$  называется *взаимно-однозначным отображением*.



Примером взаимно однозначного отображения является диагональ, т. е. *тождественное отображение*  $E(x) = x$ .

Пусть  $R, S, T$  — отображения,  $A$  — непустое множество индексов  $a$ , для каждого из которых определено множество  $X_a$ . Тогда

- (1)  $(R^{-1})^{-1} = R, (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ .
- (2)  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ .
- (3)  $(R \circ S)(A) = R(S(A))$  для каждого множества  $A$ .
- (4)  $R(\cup\{X_a: a \in A\}) = \cup\{R(X_a): a \in A\}$ .
- (5)  $R(\cap\{X_a: a \in A\}) \subset \cap\{R(X_a): a \in A\}$ .
- (6)  $R^{-1}(\cup\{X_a: a \in A\}) = \cup\{R^{-1}(X_a): a \in A\}$ .
- (7)  $R^{-1}(\cap\{X_a: a \in A\}) = \cap\{R^{-1}(X_a): a \in A\}$ .
- (8)  $R^{-1}(A \setminus B) = R^{-1}(A) \setminus R^{-1}(B)$ .
- (9)  $R^{-1} \cdot R = R \cdot R^{-1} = E$ , где  $E$  — тождественное отображение.

**Произведение множеств.** Важную роль в анализе играет обобщение понятия декартового произведения множеств на случай произвольной совокупности сомножителей, которое основывается на понятии отображения. Пусть каждому элементу  $\alpha \in A$  поставлено в соответствие множество  $X_\alpha$ . Назовем *нитью* любое отображение  $x$ , определенное на  $A$ , в силу которого каждому элементу  $\alpha$  из множества  $A$  однозначно сопоставляется некоторый элемент  $x(\alpha) \in X_\alpha$ , который далее обозначим  $x_\alpha$ . (При построении указанного отображения в соответствии с определением можно считать, что рассматривается отображение  $x$  из множества  $A$  в объединение множеств  $X_\alpha$ .) При этом значение  $x_\alpha$  называется  $\alpha$ -*координатой нити*  $x$ .

**Определение 10.3.** Множество всех нитей называется произведением множеств  $X_\alpha$  и обозначается  $\Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$  или просто  $\Pi X_\alpha$ , если ясно, о каком множестве индексов идет речь.

Для каждого  $x \in \Pi X_\alpha$  и каждого  $\alpha \in A$  полагаем  $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ . Очевидно,  $\pi_\alpha$  — отображение множества  $X = \Pi X_\alpha$  во множество  $X_\alpha$ , и оно называется *проектированием произведения на  $\alpha$ -й сомножитель*.

На практике пользуются следующими частными случаями понятия произведения. Пусть  $X$  и  $Y$  — множества, обозначим  $Y^X$  множество всех отображений множества  $X$  в  $Y$ . Тогда, очевидно,

$$Y^X = \Pi\{Y_\alpha: Y_\alpha = Y, \alpha \in X\}.$$

Если для каждого  $\alpha \in A$  задано отображение  $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ , то произведение  $f = \Pi\{f_\alpha: \alpha \in A\}$  отображений  $f_\alpha$  является отображением произведения  $X = \Pi X_\alpha$  во множество  $Y = \Pi Y_\alpha$  по следующему

правилу:  $f(x) = y$  тогда и только тогда, когда  $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$  при всех  $\alpha \in A$ .

**Определение 10.4.** Назовем *смежным классом* отношения  $R$ , определяемым элементом  $a \in P$ , множество таких  $x \in P$ , что  $xRa$ .

**Определение 10.5.** Систему подмножеств множества  $P$  назовем *разбиением*, если эти множества попарно непересекаются, а их объединение совпадает с  $P$ .

**Теорема 10.1.** Совокупность смежных классов эквивалентности на данном множестве является разбиением.

□ Ввиду рефлексивности каждый элемент данного множества  $P$  содержится в определяемом им смежном классе. Рассмотрим смежные классы  $A$  и  $B$ , определяемые элементами  $a$  и  $b$  соответственно. Пусть существует элемент, т. е. пересечение классов предполагается не пустым:  $z \in A \cap B$ . Тогда справедливо, что

$$xRa, \quad zRa, \quad zRb, \quad yRb,$$

а в силу симметричности эквивалентности, имеем

$$aRz, \quad bRz.$$

Теперь воспользуемся транзитивностью на цепочках  $xRa, aRz, zRb$  и  $yRb, bRz, zRa$ , из которой следует  $xRb, yRa$ . Таким образом, элемент  $x \in B$ , а  $y \in A$ , т. е.  $A = B$ . Следовательно, пересекающиеся классы совпадают и, значит, несовпадающие классы не пересекаются. Теорема доказана. ■

Рассмотрим в универсальном классе  $U$  класс множеств  $\text{card } A$  (кардинальное число множества  $A$ ), для которых существует взаимно-однозначное отображение между элементами из  $A$  и элементами этих множеств. Произведение  $\text{card } A \times \text{card } A$  задает отношение эквивалентности в классе  $U$ .

**Числа.** Понятие отображения может использоваться для определения понятия числа. На этом пути определяются не только натуральные числа, но и бесконечные, т. е. кардинальные и порядковые числа, подробные сведения о которых излагаются в стандартном курсе теории множеств. Приведем для напоминания лишь основные термины. Множество называется *счетным*, если оно состоит из конечного числа элементов (в том числе — пустого множества элементов) или если существует взаимно-однозначное отображение этого множества на множество  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  всех натуральных чисел. Множества  $X$  и  $Y$  называются *равномощными* или *эквивалентными*,

если существует взаимно-однозначное отображение множества  $X$  на множество  $Y$ , в таком случае пишут  $\text{card } X = \text{card } Y$ . Класс всех множеств, равномоощных данному множеству  $X$ , называется *мощностью* множества  $X$  и обозначается  $\text{card } X$ . Мощности именуются также термином *кардинальные числа*.

Выделим специальный класс отношений, называемый *порядком*.

**Отношения порядка.** Отношение называется *порядком*, если оно является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

**Пример 10.1.** Отношение включения  $\subset$  на  $2^M$  — множестве всех подмножеств множества  $M$ .

**Пример 10.2.** Порядком всегда является диагональ.

Множество вместе с заданным на нем порядком называется (*частично*) *упорядоченным множеством*.

Порядок  $R$  называется *линейным*, если для каждой пары  $x, y \in P$  истинно по крайней мере одно из соотношений:  $xRy$  или  $yRx$ .

В дальнейшем отношение порядка  $R$  будем обозначать символом нестрогого неравенства  $\leq$ , если при этом не возникают недоразумения. Таким образом, частично упорядоченное на множестве  $E$  — это пара  $(E, \leq)$ .

Пусть  $F$  — подмножество частично упорядоченного множества  $(E, \leq)$ ; элемент  $x \in E$  называется *мажорантой* множества  $F$ , если  $f \leq x$  для всех  $f \in F$ . Мажоранта  $x$  множества  $F$  называется его *верхней гранью*, если  $x \leq g$  для любой мажоранты  $g$  множества  $F$ . Миноранта множества и его нижняя грань определяются аналогично заменой «знаков неравенства» на противоположные. Верхнюю грань множества  $F$  будем обозначать символом  $\sup F$ , а нижнюю грань —  $\inf F$ . Элемент  $x \in E$  называется *максимальным*, если из соотношения  $x \leq y$  следует  $y \leq x$ .

**Теорема 10.2.** Пусть дано отображение  $f: E \rightarrow E$  такое, что  $x \leq f(x)$ , причем  $(E, \leq)$  — непустое частично упорядоченное множество, обладающее следующими свойствами:

1. Если  $a \leq b$  и  $b \leq a$ , то  $a = b$ .
2. Каждое линейно упорядоченное подмножество из  $E$  имеет верхнюю грань.

Тогда во множестве  $E$  существует неподвижная точка отображения  $f$ , т. е. такой элемент  $w$ , что  $w = f(w)$ .

Доказательство этой теоремы приведено в [75].

**Теорема 10.3 (Хаусдорф).** Пусть семейство  $\mathcal{E}$  линейно упорядоченных подмножеств частично упорядоченного множества  $(E, \leq)$

рассматривается как частично упорядоченное множество  $(\mathcal{E}, \subset)$  с отношением включения между элементами множества  $\mathcal{E}$  (являющимися подмножествами в  $E$ .) Тогда  $\mathcal{E}$  имеет максимальный элемент. Таким образом, каждое частично упорядоченное множество содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество.

□ Если семейство  $\mathcal{E}$  не имеет максимального элемента, то для каждого множества  $A \in \mathcal{E}$  существует соответствующее ему множество  $f(A) \in \mathcal{E}$ , в котором является подмножеством, не совпадающим с  $f(A)$ . Но это противоречит предыдущей теореме. Теорема доказана. ■

**Теорема 10.4 (Цорн).** Если каждое линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества  $(E, \leq)$  имеет мажоранту, то в  $E$  существует максимальный элемент.

□ Пусть  $x$  является мажорантой существующего по предыдущей теореме максимального линейно упорядоченного подмножества  $E_0$  частично упорядоченного множества  $(E, \leq)$ . Допустим, что  $x \leq y$ . Тогда если  $y \notin E_0$ , то множество  $E_0 \cup \{y\}$  будет линейно упорядоченным множеством, содержащим  $E_0$  как собственное подмножество (т. е. подмножество, которое не совпадает с данным множеством). Поэтому из максимальной  $E_0$  выводим принадлежность  $y \in E_0$ , так что  $y \leq x$ . Теорема доказана. ■

Теорема Цорна эквивалентна аксиоме выбора Цермело, которая постулирует для любой системы непересекающихся множеств  $\{X_i\}_{i \in I}$  существование такого множества  $C$ , что  $X_i \cap C \forall i \in I$ , состоящего ровно из одного элемента. Аксиома Цермело и теорема Цорна эквивалентны теореме Цермело о существовании вполне упорядоченной структуры на любом заданном множестве.

**Теорема 10.5 (Цермело).** Каждое множество может быть вполне упорядочено.

□ Зададимся на множестве  $E$  каким-либо отношением порядка  $\leq_0$  и рассмотрим семейство  $\{\mathcal{E}\}$  всех вполне упорядоченных множеств  $(E_0, \leq_0)$  таких, что  $E_0 \subset E$ . Определим на  $\mathcal{E}$  отношение порядка  $\prec$ , полагая

$$(E_0, \leq_0) \prec (E_1, \leq_1)$$

в том и только том случае, если выполняются следующие условия:

- 1)  $E_0 \subset E_1$ ,
- 2) из  $x, y \in E_0$  и  $x \leq_0 y$  следует  $x \leq_1 y$ ,
- 3) из  $x \in E_0$  и  $y \notin E_1$  следует  $x \leq_1 y$ .

При этом упорядочении каждое линейно упорядоченное подмножество  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$  имеет мажоранту. Эта мажоранта может быть определена соотношением

$$(\cup \mathcal{E}_0, \leq'),$$

где  $x \leq' y$ , если  $E_0 \in \mathcal{E}_0$  и  $x \leq_0 y$  в упорядоченности  $\leq_0$  на  $E_0$ . Очевидно, что доказательство принадлежности  $(\cup \mathcal{E}_0, \leq')$  семейству  $\mathcal{E}$  будет означать, что это и есть искомая мажоранта. Перейдем к доказательству, что упомянутое множество является вполне упорядоченным, а, значит, принадлежит  $\mathcal{E}$ . Действительно, то, что  $x \leq' x$  для  $x \in \cup \mathcal{E}_0$ , ясно. Если  $x \leq' y$  и  $y \leq' z$ , то

$$x, y \in E_0 \in \mathcal{E}_0 \quad y, z \in E_0 \in \mathcal{E}_0, \quad x \leq_0 y \quad \text{и} \quad y \leq_0 z.$$

Так как  $\mathcal{E}_0$  — линейно упорядоченное множество, то можно считать, что

$$(E_0, \leq_0) \prec (E_0, \leq_1),$$

откуда ясно, что  $x \leq_1 z$  и, следовательно, что  $x \leq' z$ . Если  $x \leq' y$  и  $y \leq' z$ , то  $x, y \in E_0$  и  $x, y \in E_1$ , причем  $x \leq_0 y$  и  $y \leq_1 x$ . Отсюда, считая, что  $(E_0, \leq_0) \prec (E_0, \leq_1)$ , получаем, что  $x = y$ .

Пусть теперь множество  $F \subset \cup \mathcal{E}_0$ , причем  $F$  непусто. Тогда для некоторого  $E_0 \in \mathcal{E}_0$  выполняется соотношение

$$F \cap E_0 \neq \emptyset.$$

Частично упорядоченное множество  $(E_0, \leq_0)$  является вполне упорядоченным. Пусть  $x_0 \in F \cap E_0$  будет минорантой множества  $F \cap E_0$  в упорядоченности  $\leq_0$ . Тогда, если

$$y \in F, y \notin F \cap E_0, \quad \text{то} \quad x_0, y \in E_1, \quad \text{где} \quad (E_0, \leq_0) \prec (E_0, \leq_1),$$

так что  $x_0 \leq_1 y$ . Следовательно,  $x_0$  будет минорантой множества  $F$  в упорядоченности  $\leq'$ . Тем самым доказано существование мажоранты для множества  $\mathcal{E}_0$ .

Теперь применим теорему Цорна, в силу которой существует максимальное вполне упорядоченное подмножество  $E_0$ . Но тогда  $E_0 = E$ , так как если в  $E$  найдется элемент  $x$ , не принадлежащий  $E_0$ , то упорядоченность  $\leq_0$  множества  $E_0$  можно распространить на множество  $E_0 \cup \{x\}$ , полагая по определению, что  $y \leq_0 x$  для всех  $y \in E_0$ . Теорема доказана. ■

## § 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ

Пусть  $X$  — множество. *Топологией* в  $X$  назовем некоторую систему  $\mathcal{F}$  подмножеств из  $X$ , удовлетворяющую следующим условиям:

- (1) множества  $\emptyset$  и  $X$  принадлежат  $\mathcal{F}$ ;
- (2) объединение любого семейства множеств из  $\mathcal{F}$  принадлежит  $\mathcal{F}$ ;
- (3) пересечение любого конечного семейства множеств из  $\mathcal{F}$  принадлежит  $\mathcal{F}$ .

Элементы системы  $\mathcal{F}$  называются *открытыми* множествами топологии  $\mathcal{F}$ . Пару, состоящую из  $(X, \mathcal{F})$ , назовем *топологическим пространством*.

Если  $\mathcal{F}$  — топология во множестве  $X$ , то под *базой* топологии  $\mathcal{F}$  понимают такую подсистему  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ , что каждый элемент из  $\mathcal{F}$  является объединением некоторого подмножества элементов из  $\mathcal{A}$ . Топологическое пространство со счетной базой называется *пространством со второй аксиомой счетности*.

*Замкнутыми* называются множества из  $X$ , являющиеся дополнениями открытых во множестве  $X$ .

Назовем *замыканием* множества  $A$  в топологическом пространстве  $X$  наименьшее замкнутое множество  $[A]$ , содержащее  $A$  (замыкание совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих множество  $A$ ).

*Окрестностью* точки  $x \in X$  называется любое подмножество из  $X$ , содержащее открытое множество из  $\mathcal{F}$ , в которое входит точка  $x$ . Задание окрестностей точек в топологическом пространстве полностью определяет его топологию.

*Базой окрестностей точки  $x \in X$*  назовем такую совокупность окрестностей  $\mathcal{B}_x$  точки  $x$ , что для каждой ее окрестности  $V_x$  существует окрестность  $U_x \in \mathcal{B}_x$ , которая принадлежит  $V_x$ . Топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если каждая его точка имеет счетную базу окрестностей. Совокупность открытых баз окрестностей всех точек данного топологического пространства задает базу топологии.

Удобным способом определения топологических векторных пространств служит задание их топологии в терминах систем окрестностей каждой точки. Благодаря векторной структуре систему окрестностей нуля можно превратить в систему окрестностей произвольной точки за счет сдвигов этих окрестностей (операцией сложения с фиксированным вектором).

Топологическое пространство называется *отделимым* или *хаусдорфовым*, если любые две различные точки  $x$  и  $y$  во множестве  $X$  имеют непересекающиеся окрестности.

Точка  $x$  называется *точкой прикосновения множества*  $A$  в топологическом пространстве  $X$ , если каждая окрестность точки  $x$  содержит точки множества  $A$ . Точка  $x$  называется *предельной точкой множества*  $A$  в топологическом пространстве  $X$ , если каждая окрестность точки  $x$  содержит точки множества  $A$ , отличные от  $x$ .

**Лемма 10.1.** Замыкание множества  $A$  в топологическом пространстве состоит из точек прикосновения  $A$  (иначе говоря, замыкание — это объединение множества  $A$  и всех его предельных точек).

Пусть  $(X, \mathcal{F})$  — топологическое пространство и  $Y \subset X$ . *Индукцированной топологией* в  $Y$  называется топология, в которой открытыми множествами по определению являются пересечения  $Y \cap \mathcal{F}$  — открытыми множествами из  $X$ .

Пусть  $X, Y$  — топологические пространства и  $f$  — отображение пространства  $X$  в  $Y$ . Отображение  $f$  называется *непрерывным*, если множество  $f^{-1}(V)$  открыто в  $X$  всякий раз, когда множество  $V$  открыто в  $Y$ . Для этого достаточно, чтобы прообразы  $f^{-1}(V)$  были открыты в  $X$  для любого элемента  $V$ , принадлежащего некоторой базе топологии в  $Y$ .

**Лемма 10.2.** Для того чтобы отображение было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого замкнутого множества был замкнут.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *гомеоморфизмом* пространства  $X$  на пространство  $Y$ , если оно взаимно однозначное, а отображения  $f$  и  $f^{-1}$  — непрерывные.

Иногда возникает потребность наделения множества  $X$  такой топологией, в которой становятся непрерывными заданные отображения множества  $X$  в некоторые топологические пространства. Предположим, что задано семейство топологических пространств  $(Y_i)_{i \in I}$ , и для каждого  $i \in I$  задано отображение  $f_i: X \rightarrow Y_i$ . Рассмотрим такие топологии, при которых для каждого индекса  $i \in I$  отображение  $f_i: X \rightarrow Y_i$  непрерывное. Очевидно, такие топологии существуют, например сильнейшая или дискретная топология. Среди таких топологий существует слабая. Ее база может быть задана следующим образом. Если множество  $V_i$  открытое в топологическом пространстве  $Y_i$ , то положим элементами базы искомого топологии все множества вида

$$U = \cap \{f^{-1}(V_i) : i \in I\},$$

где  $V_i = Y_i$  для всех значений  $i$ , кроме конечного или пустого набора индексов  $i$ . Топология, задаваемая этой базой, — слабая,

в которой каждое из отображений  $f_i : X \rightarrow Y_i$  непрерывное. Будем ее называть *топологией, определенной заданным семейством отображений  $\{f_i\}$* .

*Направленным множеством* назовем частично упорядоченное множество  $I$  с отношением порядка  $\geq$ , в котором любые два элемента обладают общей *мажорантой*, т. е. для каждой пары  $\alpha_1, \alpha_2 \in I$  можно указать элемент  $\alpha_3 \in I$  такой, что

$$\alpha_3 \geq \alpha_1, \quad \alpha_3 \geq \alpha_2.$$

*Направленность* (сеть) — это параметрическое семейство элементов, множество индексов которых направленно. Иногда сеть называют *обобщенной последовательностью*. Каждая последовательность является сетью. Приводимое ниже определение подсети обобщает понятие подпоследовательности.

*Поднаправленностью* (подсетью) направленности  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$  назовем такую направленность  $\{y_\beta\}_{\beta \in J}$ , для которой существует функция

$$F: (J, \geq) \rightarrow (I, \geq_1)$$

со следующими свойствами:

- 1)  $y_\beta = x_{F(\beta)} \quad \forall \beta \in J$ ;
- 2) для каждого  $\alpha' \in I$  существует такое  $\beta' \in J$ , что при  $\beta \geq \beta'$  значения  $F(\beta) \geq_1 \alpha'$ .

Назовем сеть *сходящейся* к элементу  $x$  топологического пространства  $X$ , если для каждой окрестности точки  $x$  можно указать такой индекс, начиная с которого элементы сети принадлежат данной окрестности. Если множество индексов сети отождествляется с множеством натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , то сеть называется *последовательностью*.

**Лемма 10.3.** *Топологическое пространство является хаусдорфовым (отделимым) тогда и только тогда, когда каждая сходящаяся сеть имеет не более одного предела.*

**Лемма 10.4 (свойства топологических пространств в терминах направленностей).** Пусть топологическое пространство является хаусдорфовым. Тогда

- 1) точка  $x$  принадлежит замыканию данного множества  $A$ , если существует сеть элементов из  $A$ , сходящаяся к  $x$ ;
- 2) точка является предельной для сети, если существует подсеть, сходящаяся к этой точке;
- 3) если сеть сходится к некоторой точке, то и каждая ее подсеть сходится к той же точке;



- 4) отображение  $f: X \rightarrow Y$  ( $X$  и  $Y$  — хаусдорфовы пространства) непрерывно в точке  $x$  тогда и только тогда, когда сеть  $f(x_\alpha)$  сходится к  $f(x)$  для любой сети  $\{x_\alpha\}$  из  $X$ , сходящейся к точке  $x$ .

### § 3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТОПОЛОГИЙ

Пусть  $\{X_i\}_{i \in I}$  — некоторое семейство топологических пространств. Образует произведение множеств  $X = \prod X_i$ , т. е. всех таких наборов  $x = (x_i)$ , что  $x_i \in X_i$  для каждого  $i \in I$ . Рассмотрим отображения  $\pi_i$  произведения  $X = \prod X_i$  на множества  $X_i$ , определенные равенствами  $\pi_i(x) = x_i$  (так называемые проекции).

Если топологические пространства  $X_i = Y$  для каждого  $i \in I$ , где  $Y$  — фиксированное пространство, то произведение  $\prod X_i$  есть не что иное, как множество всех отображений, определенных на  $I$  со значениями в  $Y$ . В этом случае будем пользоваться естественным обозначением  $Y^I \stackrel{\text{def}}{=} \prod X_i$ . Топология в  $X = \prod X_i$ , заданная семейством проекций  $\pi_i$ , называется *произведением топологий пространств  $X_i$* . Множество  $X$ , наделенное такой топологией, называется *топологическим произведением семейства пространств  $\{X_i\}_{i \in I}$* , а сами пространства  $X_i$  — его *сомножителями*.

**Лемма 10.5.** *Отображение  $f$  топологического пространства  $S$  в произведение  $X$  непрерывно тогда и только тогда, когда каждая суперпозиция  $\pi_i \circ f: S \rightarrow X_i$  непрерывна.*

**Лемма 10.6.** *Если каждый из сомножителей  $X_i$  произведения  $X$  — отдельное пространство, то произведение  $X$  также отдельное пространство.*

Если  $X_i = Y$  для всех  $i$ , то топологию произведения  $X = Y^I$  обычно называют *топологией поточечной сходимости на  $I$* , ибо произведение в этом случае естественно отождествляется со множеством всех отображений из  $I$  в  $Y$ .

### § 4. КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

*Покрытием множества  $X$*  называют систему  $\Sigma$  подмножеств в  $X$ , объединение которых совпадает с  $X$ . Покрытие  $\Sigma'$  называется *подпокрытием покрытия  $\Sigma$* , если  $\Sigma' \subset \Sigma$ .

Покрытие  $\Sigma$  называют *открытым*, если оно состоит из открытых множеств в  $X$ .

Систему  $\Sigma$  подмножеств множества  $X$  называют *центрированной*, если каждая непустая конечная подсистема в  $\Sigma$  имеет непустое пересечение.

Топологическое пространство называется *компактным*, если оно отделимое и каждое открытое покрытие в нем содержит конечное подпокрытие.

**Теорема 10.6.** Пусть  $X$  — топологическое хаусдорфово пространство. Следующие четыре утверждения эквивалентны.

- 1) Каждое открытое покрытие пространства  $X$  содержит конечное подпокрытие.
- 2) Если система  $\Sigma$  замкнутых множеств пространства  $X$  центрирована, то пересечение всех множеств системы  $\Sigma$  непусто.
- 3) Каждая сеть точек из  $X$  имеет в  $X$  предельную точку.
- 4) Каждая сеть точек из  $X$  содержит сходящуюся подсеть.

Очевидно, топологические пространства, обладающие одним из свойств (1)–(4) (и, следовательно, каждым), являются компактными.

Множество  $A$  топологического пространства  $X$  называется *компактным*, если оно является компактным в индуцированной топологии. Множество  $A$  называется *относительно компактным*, если его замыкание компактно.

**Следствие 10.1.** Если  $X$  — компактное пространство, то каждое его бесконечное подмножество содержит предельную точку.

**Следствие 10.2.** Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

**Следствие 10.3.** Компактные подмножества хаусдорфовых пространств замкнуты в содержащих их пространствах.

**Следствие 10.4.** Пусть  $X$  — компактное пространство. Если сеть в  $X$  имеет не более одной предельной точки, то она сходится.

**Следствие 10.5.** Хаусдорфово пространство компактно тогда и только тогда, когда любая его центрированная система подмножеств имеет общую точку прикосновения.

## § 5. ТЕОРЕМА О ГОМЕОМОРФИЗМЕ

Следующая теорема играет существенную роль в построении классов корректности среди глобальных функциональных решений систем законов сохранения.

**Теорема 10.7 (теорема о гомеоморфизме).** Если  $X$  — компактное, а  $Y$  — отделимое топологическое пространство и отображение

$f: X \rightarrow Y$  непрерывно, то множество  $f(X)$  компактно в  $Y$ . Если, кроме того отображение  $f$  взаимно однозначное, то  $f$  — гомеоморфизм пространства  $X$  на пространство  $f(X)$ .

□ Пусть  $\{V_i\}$  — открытое покрытие множества  $A = f(X)$ . Система множеств  $\{f^{-1}(V_i)\}$  является тогда открытым покрытием пространства аргументов  $X$ , так как для непрерывного отображения прообразы открытых множеств открыты. В силу компактности  $X$  система  $\{f^{-1}(V_i)\}$  содержит конечное подпокрытие. Очевидно, образы этой конечной подсистемы составляют искомое конечное подпокрытие для множества  $A$ . Таким образом, множество  $f(X)$  компактно в индуцированной топологии.

Допустим теперь, что  $f$  является взаимно однозначным отображением компактного пространства  $X$  на пространство  $Y$ . Пусть  $F$  — произвольное замкнутое подмножество в  $X$ , т. е. оно компактное (следствие 10.2). Значит, в силу первой части доказательства его образ компактен в хаусдорфовом пространстве  $Y$  и, следовательно, по следствию 10.3, множество  $f(F)$  замкнутое в пространстве  $Y$ , что в свою очередь приводит к его замкнутости в индуцированной топологии на  $f(X)$ . Итак, для обратного отображения  $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$  прообраз каждого замкнутого множества замкнут, т. е. отображение  $f^{-1}$  непрерывно. Тем самым установлено, что  $f$  — гомеоморфизм. Теорема доказана. ■

## § 6. ТЕОРЕМА А. Н. ТИХОНОВА

Приводимая ниже теорема А. Н. Тихонова<sup>3)</sup> [160] является центральным результатом теории компактных топологических пространств и играет фундаментальную роль в обосновании глобальной сходимости приближенных методов для излагаемой в гл. 2 теории функциональных решений систем законов сохранения.

**Теорема 10.8.** *Топологическое произведение семейства компактных топологических пространств есть компактное пространство.*

<sup>3)</sup> Андрей Николаевич Тихонов (30.10.1906–7.10.1993) — выдающийся советский математик и геофизик, академик АН СССР, дважды Герой Социалистического Труда (1953, 1986). Родился в Гжатске. Окончил Московский государственный университет (1927). С 1936 работал в МГУ и в Институте прикладной математики АН СССР. Ученик П. С. Александрова. А. Н. Тихонов получил важные результаты и в наиболее абстрактных областях чистой математики, и в математических дисциплинах, непосредственно связанных с практикой. В теоретико-множественной топологии он ввел понятия бесконечного произведения топологических пространств, так называемое тихоновское произведение, и понятие вполне регулярных пространств — тихоновских пространств, являющихся центральными результатом теории компактных пространств, см. [15, 160].

□ Пусть  $\{X_i\}_{i \in I}$  — семейство компактных топологических пространств и  $X$  — его произведение. По следствию 5 к теореме 10.2 достаточно показать, что каждая центрированная система подмножеств произведения имеет непустое пересечение, т. е.

$$\bigcap \{A : A \in \Sigma\} \neq \emptyset,$$

где  $\Sigma$  — произвольная центрированная система множеств в  $X$ . Не нарушая общности, можно считать, что  $\Sigma$  — максимальная центрированная система множеств произведения, ибо по лемме Цорна любую центрированную систему можно расширить до максимальной. Из условия максимальной центрированной системы  $\Sigma$  получаем следующие следствия:

- 1) система  $\Sigma$  замкнута относительно конечных пересечений;
- 2) всякое множество в  $X$ , пересекающее каждое множество системы  $\Sigma$ , само принадлежит системе  $\Sigma$ .

При каждом фиксированном индексе  $i$  система проекций  $\pi_i(\Sigma)$  подмножеств пространства  $X_i$  центрирована. В силу компактности  $X_i$  система проекций  $\pi_i(\Sigma)$  множеств из системы  $\Sigma$  имеет общую точку прикосновения  $x_i \in X_i$ . Поэтому если  $U_i \subset X_i$  — некоторая окрестность точки  $x_i$ , то пересечение  $U_i \cap \pi_i(A)$  непусто для любого множества  $A \in \Sigma$ . Другими словами, множество  $\pi^{-1}(U_i)$  пересекает каждое множество системы  $\Sigma$ . В силу свойства (2) множество  $\pi^{-1}(U_i) \in \Sigma$ , а из свойства (1) следует, что таким же свойством обладают любые конечные пересечения таких множеств. Однако совокупность конечных пересечений множеств вида  $\pi^{-1}(U_i)$  образует базу окрестностей точки  $x = \{x_i\}_{i \in I} \in X = \prod X_i$  в топологии произведения  $X$ .

Таким образом, каждая окрестность точки  $x$  принадлежит системе  $\Sigma$ , т. е.  $x$  является точкой прикосновения любого множества системы  $\Sigma$ . Теорема доказана. ■

## § 7. СЛАБЫЕ ТОПОЛОГИИ В СОПРЯЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

**Топологии  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{L})$ .** Пусть  $\mathcal{E}$  — векторное пространство без топологии,  $\mathcal{L}$  — векторное подпространство в  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}^+$  — алгебраическое сопряженное пространства  $\mathcal{E}$ . Среди топологий в  $\mathcal{E}^+$ , среди которых каждая из функций  $l(F)$  (где  $F \in \mathcal{L}$  фиксированное, а переменными являются  $l \in \mathcal{E}^+$ ) с числовыми значениями непрерывна при произвольном фиксированном  $F \in \mathcal{E}$ , существует слабейшая топология. Эта топология обозначается  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{L})$  и называется слабой топологией, порожденной подпространством  $\mathcal{L}$ . Топология  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{L})$

согласуется со структурой векторного пространства  $\mathcal{E}^+$ , превращает  $\mathcal{E}^+$  в локально выпуклое пространство. Базу окрестностей нуля в  $\mathcal{E}^+$  образуют множества вида

$$U^+(D, \varepsilon) = \{l \in \mathcal{E}^+ : |l(F)| < \varepsilon, F \in D\},$$

где  $\varepsilon > 0$ , а  $D$  — конечное подмножество в подпространстве  $\mathcal{L}$ . Семейство полунорм

$$p_F(l) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|l(F)| : F \in \mathcal{L}\}$$

является определяющим для топологии  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{L})$ .

В случае  $\mathcal{L} = \mathcal{E}$  говорят о слабой топологии в  $\mathcal{E}^+$ .

Топология  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  всегда отделима в смысле Хаусдорфа.

**Теорема 10.9.** Пусть  $\mathcal{E}$  — векторное пространство. Множество  $G \subset \mathcal{E}^+$  относительно компактно в топологии  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено, т. е. когда

$$\sup\{p_F(l) : l \in G\} < \infty$$

для каждого  $F \in \mathcal{E}$ .

□ *Необходимость.* Пусть множество  $G$  относительно компактное, т. е. его замыкание — компактное подмножество в  $\mathcal{E}^+$ . Тогда, по теореме Коши, каждая непрерывная функция ограничена на  $[G]$  и, следовательно, при любом  $F \in \mathcal{E}$  ограничены на  $G$  полунормы  $p_F$ . Необходимость доказана.

*Достаточность.* Заметим, что пространство  $\mathcal{E}^+$  является замкнутым подмножеством в  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ , снабженным топологией поточечной сходимости (произведения), ибо предельные точки множества конечных линейных функционалов также являются конечными линейными функционалами. Далее, топология  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  индуцирована на  $\mathcal{E}^+$  топологией произведения  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ . Таким образом, множество  $G$ , рассматриваемое как подмножество в  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ , имеет ограниченные проекции, т. е. их замыкания лежат в компактах пространства  $\mathbb{R}$ . Следовательно, по теореме 10.8 (А. Н. Тихонова), множество  $G$  принадлежит компактному подмножеству  $T \subset \mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ , состоящему из произведения компактных подмножеств в  $\mathbb{R}$ , которые содержат проекции  $G$ . Таким образом, замыкание множества  $G$  в произведении  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$  принадлежит  $T$  и в силу следствия 10.2 множество  $[G]$  само является компактным подмножеством в  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ . Но поскольку  $\mathcal{E}^+$  — замкнутое подмножество в  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ , то  $[G] \subset \mathcal{E}^+$ . А так как топология  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  индуцирована на  $\mathcal{E}^+$  топологией произведения  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ , то множество  $G$  относительно компактно в  $\mathcal{E}^+$ ,  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ . Теорема доказана. ■

### § 8. ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Назовем *мерой* счетно-аддитивную функцию подмножеств множества  $\Omega$  с неотрицательными значениями, которая определена на некоторой  $\sigma$ -алгебре. Мера называется *борелевой*, если областью ее определения служат борелевы множества. Тройку  $(\Omega, \sigma, \mu)$  назовем *пространством с мерой*; оно  $\sigma$ -*конечное* (счетно-конечное), если множество  $\Omega$  может быть представлено как объединение счетного набора множеств конечной меры. Ниже всюду предполагается  $\sigma$ -конечность пространств с мерой.

Пространство  $L_p(\Omega, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , состоит из классов эквивалентности относительно меры  $\mu$  измеримых функций  $f$  на множестве  $\Omega$ , имеющих конечный интеграл Лебега

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty.$$

При  $p = 1$  классы эквивалентности состоят из функций с ограниченным существенным максимумом. Пространства  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , являются банаховыми в нормах, задаваемыми интегралами

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right\}^{1/p} < \infty,$$

где  $f$  — произвольный представитель данного класса эквивалентности. При  $p = \infty$  соответствующая норма задается существенным максимумом представителя класса  $f$

$$\|f\|_{\infty} = \text{vrai sup}_{\Omega} |f|.$$

*Сопряженные пространства* (т. е. пространства линейных непрерывных функционалов) на пространствах  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , изометрически отождествляются с пространствами  $L_q$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . *Слабая топология на  $L_p$* ,  $1 \leq p < \infty$ , задается как топология  $\sigma(L_p, L_q)$ . Пространство полагается *слабо полным*, если его каждая *слабо фундаментальная последовательность* слабо сходится (т. е. сходится в слабой топологии данного пространства).

**Теорема 10.10.** Пусть  $1 < p < \infty$ . Тогда пространство  $L_p(\Omega, \mu)$  рефлексивно и слабо полно. Для того чтобы множество в  $L_p(\Omega, \mu)$  было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным по норме.

**Теорема 10.11.** *Пространство  $L_1(\Omega, \mu)$  слабо полно. Последовательность  $\{f_n\}$  в том и только том случае слабо сходится к некоторому элементу  $f$  из  $L_1(\Omega, \mu)$ , если она ограничена и*

$$\int_E f(s)\mu(ds) = \lim_n \int_E f_n(s)\mu(ds)$$

на каждом множестве  $E$  из  $\sigma$ -алгебры, на которой определена мера  $\mu$ . Подмножество  $K \subset L_1(\Omega, \mu)$  в том и только том случае является слабо компактным, если оно ограничено и счетная аддитивность интегралов  $\int_E f(s)\mu(ds)$  равномерна относительно элемента  $f \in K$ .

Если  $\Omega$  является сепарабельным метрическим пространством, то пространства  $L_p(\Omega, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , с борелевой мерой  $\mu$  также сепарабельные.

### § 9. ТЕОРЕМЫ БЭРА И БАНАХА—ШТЕЙНГАУЗА

Множество  $S$  в топологическом пространстве  $M$  называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит непустых открытых множеств.

**Теорема 10.12 (теорема Бэра о категориях).** *Полное метрическое пространство не может быть объединением счетного числа нигде не плотных множеств.*

На практике теорема 10.12 впрямую используется редко, а пользуются одним из ее следствий, одно из которых известно под названием теорема Банаха—Штейнгауза.

**Теорема 10.13 (теорема Банаха—Штейнгауза или принцип равномерной ограниченности).** *Пусть  $X$  — банахово пространство. Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство ограниченных линейных преобразований из  $X$  в какое-либо нормированное пространство  $Y$ . Допустим, что для всякого  $x \in X$  множества  $\{\|Tx\|_Y : T \in \mathcal{F}\}$  ограничены. Тогда множество  $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$  ограничено.*

□ Пусть

$$B_n = \{x : \|Tx\|_Y \leq n, T \in \mathcal{F}\}.$$

По предположению, каждый элемент  $x$  принадлежит некоторому множеству  $B_n$  и, значит, пространство  $X$  имеет вид

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Более того, каждое множество  $B_n$  замкнуто, так как каждое преобразование  $T \in \mathcal{F}$  непрерывно. По теореме Бэра о категории какое-либо  $B_n$  содержит открытое множество и, следовательно, имеет открытый шар, на котором ограничены значения  $\|Tx\|_Y$  общей постоянной для всего множества  $\mathcal{F}$ . Таким образом, выполнив сдвиг центра этого шара в нуль, получаем на нем равномерную ограниченность значений  $\|Tx\|_Y$  относительно  $\mathcal{F}$ . Но это означает ограниченность норм семейства отображений  $\mathcal{F}$ . Теорема доказана. ■

## § 10. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В этом разделе устанавливается важный «принцип максимума» [31, 34, 48].

**Теорема 10.14 (принцип максимума).** Пусть  $G$  — открытое множество в метрическом пространстве, имеющее компактное замыкание  $\bar{G}$ ;  $\partial G$  — граница множества  $G$ ;  $(0, T]$ ,  $[0, T]$  — полуоткрытый и замкнутый отрезки вещественной числовой оси,

$$Q(T) = G \times (0, T], \quad \bar{Q}(T) = G \times [0, T], \\ \partial Q = (\bar{G} \times \{0\}) \cup (\partial G \times (0, T]).$$

Пусть вещественная функция  $f$  непрерывна на  $\bar{Q}(T)$  и имеет в каждой точке  $Q(T)$  производную по переменной  $t$ ,  $0 < t \leq T$ . Если при каждом фиксированном  $t \in (0, T]$  в точках  $\omega^* \in G$ , в которых

$$f(\omega^*, t) = \max_{\omega \in G} f(\omega, t),$$

выполнено неравенство

$$\frac{\partial f(\omega^*, t)}{\partial t} \leq 0, \tag{10.1}$$

то

$$\max_{\bar{Q}(T)} f = \max_{\partial Q} f.$$

Если же производная  $\frac{\partial}{\partial t} f$  существует на  $G \times [0, T]$  и неравенство (10.1) выполняется в точках  $\omega^* \in G$ , то в этом случае

$$\max_{\bar{Q}(T)} f = \max_{\omega \in G} f(\omega, 0).$$

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

**Лемма 10.7.** Пусть выполнены условия теоремы 10.14. Потребуем, чтобы в точках  $\omega^* \in G$ , в которых

$$f(\omega^*, t) = \max_{\omega \in G} f(\omega, t),$$



выполнялось строгое неравенство

$$\frac{\partial f(\omega^*, t)}{\partial t} < 0.$$

Тогда максимум функции  $f$  на  $\bar{Q}(T)$  достигается только на  $\partial Q$ .

□ Положим противное утверждению леммы, т. е. пусть существует точка  $(\omega_0, t_0) \in Q(T)$  такая, что

$$f(\omega_0, t_0) = \max_{\bar{Q}(T)} f. \quad (10.2)$$

Тогда по требованию леммы

$$\frac{\partial f(\omega_0, t_0)}{\partial t} < 0.$$

Таким образом, найдется точка  $t_1 \in (0, t_0)$ , в которой

$$f(\omega_0, t_1) > f(\omega_0, t_0),$$

что противоречит соотношению (10.2). Значит, максимальное значение  $f$  достигается только на  $\partial Q$ . Лемма доказана. ■

#### Доказательство теоремы 10.14.

□ Функцию  $f$ , удовлетворяющую условиям теоремы, аппроксимируем последовательностью функций

$$f_n(\omega, t) = f(\omega, t) + n^{-1}(T - t), \quad n \in \mathbb{N},$$

равномерно сходящейся к  $f$  на  $\bar{Q}(T)$ . Для каждой  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , выполнены требования леммы 10.5. Поскольку

$$\max_{\bar{Q}(T)} f_n = \max_{\partial Q} f_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

то предельный переход  $n \rightarrow \infty$  в этом равенстве приводит к соотношению

$$\max_{\bar{Q}(T)} f = \max_{\partial Q} f,$$

которым завершим доказательство первой части теоремы.

Аналогично проводится рассуждение для второй части теоремы. Теорема доказана. ■

В заключение отметим, что доказанный принцип максимума легко обобщается на вектор-функции.

В следующей лемме получим одно полезное неравенство.

**Лемма 10.8.** Пусть  $v(x, t)$  — непрерывная неотрицательная функция, заданная на прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, t) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T\},$$

имеющая на  $\Pi$  непрерывную частную производную  $v_t$ . Пусть при каждом фиксированном  $\bar{t} \in [0, T]$  в точках  $\{\bar{x}\}$ , в которых

$$v(\bar{x}, \bar{t}) = \max_{0 \leq x \leq a} v(x, \bar{t}),$$

выполняется неравенство

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \leq -g(\bar{t})v(\bar{x}, \bar{t}),$$

где  $g(t)$  — непрерывная неотрицательная функция при  $0 \leq t \leq T$ . Тогда для  $t \in [0, T]$  справедливо соотношение

$$\max_{0 \leq x \leq a} v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq a} v(x, 0) \exp \left( - \int_0^t g(s) ds \right).$$

□ Предположим, что

$$\max_{0 \leq x \leq a} v(x, 0) > 0,$$

так как в случае обращения этой величины в нуль теорема 10.14 обеспечивает выполнение тождества

$$\max_{0 \leq x \leq a} v(x, t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Поэтому без ограничения общности будем считать, что максимальный интервал положительности величины  $\max_{0 \leq x \leq a} v(x, t)$  составляет весь отрезок  $0 \leq t \leq T$ . Сначала рассмотрим случай, когда функция  $g(t)$  является неотрицательной константой. Если эта постоянная равна нулю, то для функции  $v$  справедлива теорема 10.14. Поэтому положим постоянную  $g(t) \equiv k > 0$ . Фиксируем точку  $\bar{t} \in [0, T]$ . В тех же точках,  $\{\bar{x}\} \subset [0, a]$ , для которых справедливо равенство

$$v(\bar{x}, \bar{t}) = \max_{0 \leq x \leq a} v(x, \bar{t}),$$

выполнено строгое неравенство

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) < -v(\bar{x}, \bar{t})k(1 - 2^{-n}),$$

при каждом натуральном  $n \geq 1$ . Поскольку рассматриваемые функции непрерывные, то в малой окрестности каждой точки  $(\bar{x}, \bar{t})$  выполняется неравенство

$$v_t(x, t) < -k(1 - 2^{-n})v(x, t), \quad n = 1, 2, \dots$$

В силу компактности множества  $\{\bar{x}\}$  можно указать конечный набор открытых прямоугольников, покрывающих множество  $\{\bar{x}\} \times \{\bar{t}\}$ , в каждом из которых справедливы неравенства

$$\begin{aligned} v &> 0, \\ v_t &< -k(1 - 2^{-n})v, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В силу непрерывности производной  $v_t$  она ограничена на компактах

$$\max_{\substack{0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq t \leq T}} |v_t| < \infty,$$

и можно указать такое число  $\tau > 0$ , что при  $\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + \tau$  выполняется неравенство

$$\max_{0 \leq x \leq a} v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq a} v(x, \bar{t}) \exp[-k(1 - 2^{-n})(t - \bar{t})].$$

Следовательно, на всем отрезке  $0 \leq t \leq T$  имеем

$$\max_{0 \leq x \leq a} v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq a} v(x, 0) \exp(-kt).$$

Перейдем к окончательному доказательству леммы. Разобьем отрезок  $[0, t] \subset [0, T]$  точками  $t_n = \frac{n}{N}t$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Обозначим

$$g_n = \min_{t_n \leq s \leq t_{n+1}} g(s).$$

Тогда на каждом отрезке  $t_n \leq s \leq t_{n+1}$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , в точках  $\{\bar{x}\}$  справедливо неравенство  $v_t(\bar{x}, s) \leq -g_n v(\bar{x}, s)$ . Применяя на этих отрезках соотношение (10), получаем

$$\max_{0 \leq x \leq a} v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq a} v(x, 0) \exp\left(-\sum_{n=0}^{N-1} g_n \Delta t\right), \quad \Delta t = \frac{t}{N}.$$

Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получаем утверждение леммы. Лемма доказана. ■

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей // Новосибирск: Наука, Сиб. отделение АН СССР, 1983.
- [2] *Аристов В. В., Черемисин Ф. Г.* Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана. М.: ВЦ РАН, 1992.
- [3] *Багдасарова И. Р., Галкин В. А.* Моделирование процесса коагуляции в пространственно однородном случае // Математическое моделирование, 1999. Т. 11. №6. С. 82–112.
- [4] *Багдасарова И. Р., Галкин В. А.* Моделирование периодических структур в распределении дефектов, возникающих в конструкционных материалах ЯЭУ, под действием стационарного источника // Известия вузов. Ядерная энергетика, 1999. №1. С. 85–93.
- [5] *Балеску Р.* Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, 1967.
- [6] *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 1. Перевод с английского под редакцией Д. Н. Зубарева и Ю. Л. Климонтовича. М.: Мир, 1978. 405 с.
- [7] *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2. Перевод с английского под редакцией Д. Н. Зубарева и Ю. Л. Климонтовича. М.: Мир, 1978. 399 с.
- [8] *Бараницев Р. Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975.
- [9] *Бахвалов Н. С.* О существовании в целом регулярного решения квазилинейной гиперболической системы // ЖВМ и МФ, 1970. Т. 10. №4. С. 969–980.
- [10] *Бахвалов Н. С.* Численные методы, часть 1. М.: Наука, 1973.
- [11] *Берегова Г. І., Кирилич В. М.* Гіперболічна задача Стефана в криволинійному секторі // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49. №12. С. 1684–1689.
- [12] *Бёрд Г.* Молекулярная газовая динамика // Перевод с английского А. И. Ерофеева, А. Г. Фридландера, В. Е. Яницкого. Под редакцией О. М. Белоцерковского и М. Н. Когана. М.: Мир, 1981. 319 с.
- [13] *Бобылев А. В.* О точных решениях уравнения Больцмана, Докл. АН СССР, 225. №6, 1296–1299.
- [14] *Бобылев А. В.* Об одном классе инвариантных решений уравнения Больцмана, Докл. АН СССР, 231. №3, 571–574.
- [15] *Бородин А. И., Бугай А. С.* Биографический словарь деятелей в области математики. Киев: Радянська школа, 1979.
- [16] *Больцман Л.* Лекции по теории газов / Перевод с немецкого под редакцией Б. И. Давыдова. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1953. 554 с.
- [17] *Больцман Л.* Статьи и речи. М.: Наука, 1970, 406 с.
- [18] *Бородин М. А.* Двухфазная контактная задача Стефана // Укр. мат. журн. 1995. Т. 47. №2. С. 158–167.
- [19] *Бриллоэн Л.* Наука и теория информации. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960, 392 с.
- [20] *Будак Б. М., Гапоненко Ю. Л.* О решении задачи Стефана для квазилинейного параболического уравнения с квазилинейными гранич-

- ными условиями // Труды вычислительного центра МГУ. М., 1971. С. 235–284.
- [21] *Будак Б. М., Москал М. Б.* О классическом решении 1-й краевой задачи Стефана для многомерного уравнения теплопроводности в координатном параллелепипеде // Труды вычислительного центра МГУ. М., 1971. С. 87–114.
- [22] *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [23] *Веденяпин В. В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. 112 с.
- [24] *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука; Физматлит, 1975.
- [25] *Викторовский Е. Е.* Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений // Матем. сб., 34(76), 213–248, 1954.
- [26] *Вишик М. И., Фурсиков А. В.* Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980, 440 с.
- [27] *Власов А. А.* Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1978, 264 с.
- [28] *Волощук В. М., Седунов Ю. С.* Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
- [29] *Волощук В. М.* Кинетическая теория коагуляции. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
- [30] *Галкин В. А.* О существовании и единственности решения уравнения коагуляции // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №8. С. 1460–1470.
- [31] *Галкин В. А.* Об устойчивости и стабилизации решения уравнения коагуляции // Дифференц. уравнения, 1978. Т. 14. №10. С. 1863–1874.
- [32] *Галкин В. А., Тупчиев В. А.* Об асимптотическом поведении решения уравнения коагуляции // Труды института экспериментальной метеорологии. Сер. Физика нижней атмосферы, 1978, вып. 1972. С. 31–41.
- [33] *Галкин В. А.* Итерационный метод решения одного класса эволюционных уравнений, связанных с физической кинетикой // ЖВМ и МФ, 1981. Т. 21. №2. С. 385–399.
- [34] *Галкин В. А.* Методы расчета задач физической кинетики. Обнинск: Изд-во МИФИ, 1981. 60 с.
- [35] *Галкин В. А.* О решениях уравнения коагуляции // Дифференц. уравнения, 1981. Т. 17. №4, 669–677.
- [36] *Галкин В. А.* Об одном свойстве коагуляции атмосферного аэрозоля // Метеорология и гидрология, 1983. №12. С. 11–19.
- [37] *Галкин В. А.* О решении уравнения коагуляции с ядром  $\Phi = \chi u$  // Метеорология и гидрология, 1984. №5. С. 33–39.
- [38] *Галкин В. А.* Уравнение Смолуховского для пространственно неоднородных систем // ДАН СССР, 1985. Т. 285, №5. С. 1087–1091.
- [39] *Галкин В. А., Дубовский П. Б.* О решениях уравнения коагуляции с неограниченными ядрами // Дифференц. уравнения, 1986. Т. 22. №3. С. 504–509.
- [40] *Галкин В. А.* Обобщенное решение уравнения Смолуховского для пространственно неоднородных систем // ДАН СССР, 1987. Т. 293. №1. С. 74–77.

- [41] Галкин В. А. Решение уравнений, связанных с физической кинетикой // ДАН СССР, 1988. Т. 298. №1. С. 1362–1367.
- [42] Галкин В. А., Тутчиев В. А. О разрешимости в среднем систем квазилинейных законов сохранения // ДАН СССР, 1988. Т. 300. №6. С. 1300–1304.
- [43] Галкин В. А. Функциональные решения законов сохранения // ДАН СССР, 1990. Т. 310. №4. С. 834–839.
- [44] Галкин В. А. Разрешимость в целом законов сохранения // Исследование нелинейных моделей математической физики. Обнинск: Изд-во ИАТЭ, 1990. С. 4–22. С. 4–13.
- [45] Галкин В. А. Решения уравнений физической кинетики с нелинейными операторами столкновений // Исследование нелинейных моделей математической физики. Обнинск: Изд-во ИАТЭ, 1992. С. 4–13.
- [46] Галкин В. А., Русских В. А. Сходимость приближенных методов для уравнений гидродинамики // Математическое моделирование. 1994. №3. С. 101–113.
- [47] Галкин В. А. Обоснование приближенных методов для систем законов сохранения // Вестник Московского университета, математика, механика, 1995. №6, Р. 55–59.
- [48] Галкин В. А. Методы решения задач физической кинетики. Обнинск: Изд-во ИАТЭ, 1995. 171 с.
- [49] Галкин В. А. Дополнительные главы функционального анализа. Обнинск: Изд-во ИАТЭ, 1997.
- [50] Галкин В. А., Забудько М. А. и др. Модель контроля и управления процессами выращивания кристаллов в условиях микрогравитации // Труды второго российского симпозиума «Процессы тепло-массопереноса и рост монокристаллов и тонкопленочных структур», Обнинск, 1997. С. 140–147.
- [51] Галкин В. А. Выбор глобальных классов корректности функциональных решений для систем законов сохранения // Фундаментальная и прикладная математика, 1998. Т. 4. №8. С. 853–868.
- [52] Галкин В. А. Теория функциональных решений систем законов сохранения и ее приложения // М.: Изд-во МГУ. Труды семинара им. И. Г. Петровского, 2000. Т. 20. С. 81–120.
- [53] Галкин В. А., Ткаченко М. Г. Численное решение уравнений влассовского типа, возникающих при моделировании ЯЭУ // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. №1, 1999. С. 94–103.
- [54] Галкин В. А., Забудько М. А. Точные и численные решения уравнений теплопроводности и кинетических уравнений // Известия вузов. Ядерная энергетика, 2000. №1. С. 19–28.
- [55] Галкин В. А., Шепелина Ю. О. Существование решений для стационарного уравнения Смолуховского // Тезисы международной конф. «Математическая физика, математическое моделирование и приближенные методы», посвященной памяти академика А. Н. Тихонова», Обнинск: Изд-во ИАТЭ, 15–19 мая 2000 г. С. 72–73.
- [56] Галкин В. А. Уравнение Смолуховского. М.: Физматлит, 2001. 336 с.
- [57] Галкин В. А., Рыжиков Д. А., Савельев В. И. Моделирование спектров излучения заряженных частиц, движущихся в гетерогенных средах // Ядерная энергетика, 2004. №2. С. 118–125.

- [58] Галкин В. А. Сходимость разностных схем и метода непосредственного моделирования к решениям уравнения Смолуховского кинетической теории коагуляции // Доклады РАН, 2004, 497. №1. С. 4–11.
- [59] Галкин В. А., Забудько М. А., Осецкий Д. Ю., Рыжиков Д. А., Галкина И. В. Математическое моделирование процессов роста агломератов в приближениях Смолуховского и Власова—Лиувилля—Смолуховского // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия «Математическое моделирование и оптимальное управление», Выпуск 1 (28). 2005. С. 67–74.
- [60] Галкин В. А., Осецкий Д. Ю. Случай больцмановского газа, приводящий к уравнению коагуляции Смолуховского // ЖВМ и МФ, 2006, Т. 46. №3. С. 535–547.
- [61] Галкин В. А., Осецкий Д. Ю. Математическое моделирование кинетики коагуляции // Математическое моделирование, 2006. Т. 16. С. 99–117.
- [62] Галкин В. А., Галкин А. В. Метод Монте-Карло прямого моделирования пространственно неоднородной коагуляции // Обнинск. В сб. «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложение к современным проблемам естествознания», Труды 3-й международной конференции. С. 18–24, 2008,
- [63] Галкин А. В. Математическое моделирование газа, образующего конденсированную структуру // Математическое моделирование, 2009. Т. 21. С. 103–117.
- [64] Галкин В. С. Прикладная математика и механика, 1958, 226. №3.
- [65] Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука; ФМЛ, 1989, 400 с.
- [66] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: ФМЛ, 1958, 307 с.
- [67] Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи математических наук. Т. 14, вып. 2 (86), 1959. С. 87–158.
- [68] Гиббс Д. Основные принципы статистической механики, излагаемые со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики. Л.: ОГИЗ, 1946, 203 с.
- [69] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т.1. М.: Наука, 1971.
- [70] Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
- [71] Головин А. М. К вопросу о решении уравнения коагуляции дождевых капель с учетом конденсации // ДАН СССР, 1963. Т. 148. №6. С. 1290–1293.
- [72] Головин А. М. Решение уравнения коагуляции облачных капель в восходящем потоке воздуха // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963. №5. С. 783–791.
- [73] Головин А. М. О спектре коагулирующих облачных капель. 2 // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963. №9. С. 1438–1447.
- [74] Головин А. М. О кинетическом уравнении коагулирующих облачных капель с учетом конденсации. 3 // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963. №10. С. 1571–1580.
- [75] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М.: ИЛ, 1962.
- [76] Джусраев Т. Д., Талиров Ж. О. Гиперболическая задача Стефана // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. №5. С. 821–831.

- [77] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966.
- [78] *Добрушин Р. Л.* Уравнения Власова // *Функциональный анализ и его приложения*. Т. 13, вып. 2, 1979. С. 48–58.
- [79] *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974, 304 с.
- [80] *Елизарова Т. Г.* Лекции: Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. М.: Физ. фак. МГУ, 2005. 224 с.
- [81] *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1971. 328 с.
- [82] *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: ФМЛ, 1970, 143 с.
- [83] *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука; ФМЛ, 1966, 687 с.
- [84] *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы математической физики. Среда из не взаимодействующих частиц. М.: Наука; ФМЛ, 1973, 351 с.
- [85] *Иванов И., Платиканов Д.* Коллоиды. Л.: Химия, 1975.
- [86] *Иванов Н. В., Пискунов В. Н.* Моделирование процессов переноса и осаждения аэрозольных частиц методом Монте-Карло. // *Вопросы атомной науки и техники, серия Математическое моделирование физических процессов*. 1991. Вып. 2. С. 73–78.
- [87] *Кадомцев Б. Б., Петвиапвили В. И.* ОБ устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // *ДАН СССР*, 1970. Т. 192, 4, С. 753–756.
- [88] *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960.
- [89] *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
- [90] *Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука, 1967.
- [91] *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М., 1982.
- [92] *Климонтович Ю. Л.* Возникновение турбулентности и структуры хаоса // М.: Наука, 1989.
- [93] *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
- [94] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [95] *Кричевер И. М.* Периодическая задача для уравнения Кадомцева–Петвиапвили // *ДАН СССР*, 1988. Т. 298, 4, 802–807.
- [96] *Кружков С. Н.* К методам построения обобщенных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // *УМН*, 1965. Т. 20. №6. С. 112–118.
- [97] *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // *Матем. сб.*, 1970. Т. 81. №2. С. 228–255.
- [98] *Кружков С. Н., Фаминский А. В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза // *Мат. сб.*, 1983. Т. 120, 3, 396–425.



- [99] *Кружков С. Н.* Труды / Составители: Н. С. Бахвалов, В. А. Галкин, Ю. А. Дубинский. М.: Наука; Физматлит, 2000.
- [100] *Кузнецов Н. Н., Тупчиев В. А.* Об одном обобщении теоремы Глима // ДАН СССР, 1975. Т. 221. №2. С. 287–290.
- [101] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1, 525 с.
- [102] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2, 620 с.
- [103] *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. Перевод с английского А. С. Компанейца. М.: ИЛ, 1950, 426 с.
- [104] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [105] *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973.
- [106] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости // М.: Физматгиз, 1961.
- [107] *Ладыженская О. А., Солоников В. В., Уралцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [108] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика и электродинамика. М.: Наука; ФМЛ, 1969, 271 с.
- [109] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика, ч. 1 (Серия «Теоретическая физика». Т. 5). М., 1976.
- [110] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика // М.: Наука, 1988. Т. 6.
- [111] Неравновесные явления. Уравнение Больцмана. Под редакцией Д. Л. Либовица и Е. У. Монтролла. М.: Мир, 1986.
- [112] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // М.: Мир, 1972.
- [113] *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
- [114] *Лонгмайр К.* Физика плазмы. Атомиздат. М., 1966.
- [115] *Любов Б. Я.* Теория кристаллизации в больших объемах. М.: Наука, 1975.
- [116] *Максвелл Дж. К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. 685 с.
- [117] *Мартынов Г. А., Баканов С. П.* О решении кинетического уравнения коагуляции // Исследования в области поверхностных сил. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 220–229.
- [118] *Марченко М. П., Фрязинов И. В.* Комплекс программ Карма 1 решения нестационарных задач выращивания монокристаллов в ампулах // ЖВМ и МФ, 1997. Т. 37. №8. С. 988–998.
- [119] Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучения. / Под. ред. Марчука Г. И. М.: Атомиздат, 1967. 255 с.
- [120] *Маслов В. П.* Уравнения самосогласованного поля. В кн. Современные проблемы математики. Т. 11, М.: ВИНТИ, 1978, 153–234.
- [121] Математика в современном мире. М.: Мир, 1968.
- [122] *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Часть 1. М.: Наука; ФМЛ, 1965, 634 с.
- [123] *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Часть 2. М.: Наука; ФМЛ, 1967, 720 с.

- [124] Мюллер Х. Коагуляция коллоидов с частицами, имеющими форму «палочек» и «листочков», теория любых полидисперсных систем и коагуляция при течении // Коагуляция коллоидов. М.: ОНТИ, 1936. С. 74–98.
- [125] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979, 512 с.
- [126] Никольский А. А. Доклады АН СССР 1516 №2. №3 (1963)
- [127] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
- [128] Новиков С. П. Периодическая задача Кортевега — де Фриза // Функциональный анализ и его приложения. 1974, №8. С. 54–66.
- [129] Ньюэлл К. Солитоны в физике и математике // М.: Мир, 1988.
- [130] Олейник О. А. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // УМН, 1954. Т. 9. №3. С. 231–233.
- [131] Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // УМН, 1957. Т. 12. №3. С. 3–73.
- [132] Олейник О. А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // ДАН СССР 135. 1960. С. 1054–1057.
- [133] Омельянов Г. А., Данилов В. Г., Радкевич Е. В. О регуляризации начальных данных модифицированной задачи Стефана // Дифф. уравн. 1994. С. 793–795.
- [134] Панов Е. Ю. О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Известия РАН, 1996. №2. С. 107–148.
- [135] Пискунов В. Н. Теоретические модели кинетики формирования аэрозолей. Монография.-Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000, 209 с.
- [136] Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1964, 314 с.
- [137] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Труды Третьего матем. съезда. Т. 1, 217–218, 1956.
- [138] Повзнер А. Я. Об уравнении Больцмана кинетической теории газов // Матем. сборник, 1962. Т. 58. №1. С. 65–86.
- [139] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [140] Рид К. Гильберт. М.: Наука, 1977.
- [141] Рождественский Б. Л. Разрывные решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа // УМН, 1960. Т. 15. №6. С. 59–116.
- [142] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
- [143] Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985. 320 с.
- [144] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- [145] Румер Ю. Б., Рыбкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука; Физматлит. 1977.
- [146] Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971, 367 с.
- [147] Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 5. С. 816–827.

- [148] Сафронов В. С. Частный случай решения уравнения коагуляции // ДАН СССР, 1962. Т. 147. №1. С. 64–67.
- [149] Сафронов В. С. Эволюция допланетарного облака и образование Земли и планет. М.: Наука, 1969.
- [150] Смолуховский М. Опыт математической теории кинетики коагуляции коллоидных растворов // Коагуляция коллоидов. М.: ОНТИ, 1936. С. 7–39.
- [151] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике // Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1962.
- [152] Солнцев Ю. К. Об устойчивости по Ляпунову положений равновесия системы двух дифференциальных уравнений в случае разрывных правых частей. Ученые записки МГУ, матем. 4, вып. 148, 144–180, 1951.
- [153] Станюкович К. П. Неуставившиеся движения сплошной среды. М.: Наука; ФМЛ, 1971, 854 с.
- [154] Степанов А. С. К выводу уравнения коагуляции // Труды ИЭМ, 1971, вып. 23. С. 3–16.
- [155] Степанов А. С. Вывод уравнения коагуляции для броуновски движущихся частиц // Труды ИЭМ, 1971, вып. 23. С. 42–64.
- [156] Степанов А. С. Кинетическое уравнение диффузионного роста капель // Изв. АН СССР, Физ. атмосферы и океана, 1972. Т. 8. №8. С. 853–865.
- [157] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ // М.: Мир, 1981.
- [158] Тер-Микаэлян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, Изд-во АН Армянской ССР, 1969, 457 с.
- [159] Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разрывных решениях квазилинейных уравнений первого порядка // ДАН СССР, 1954. Т. 99. №1. С. 27–30.
- [160] Тихонов А. Н. Избранные труды. М.: Макс ПРЕСС. 2001.
- [161] Тодес О. М. Кинетика коагуляции и укрупнения частиц в золях // Проблемы кинетики и катализа. М.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 127–132.
- [162] Трубников Б. А. Введение в теорию плазмы, ч.1–3. М., 1969–78.
- [163] Тунццкий Н. Н. О коагуляции полидисперсных систем // ЖЭТФ, 1938. Т. 8, Вып. 4. С. 418–424.
- [164] Тупчиев В. А. Об асимптотических свойствах решения уравнения коагуляции // Труды ИЭМ, 1971, вып. 23. С. 17–27.
- [165] Тупчиев В. А. Обобщенные решения законов сохранения. М.: Физматлит, 2006.
- [166] Фаминский А. В. Задача Коши для обобщенного уравнения Кадомцева–Петвиашвили // Сиб. мат. журнал, 1992, 1.
- [167] Ферми Э. Термодинамика. Харьков, 1969. 137 с.
- [168] Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория переноса в газах. М.: Мир, 1976. 555 с.
- [169] Филитов А. Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями // Матем. сб., 1960. Т. 51. №4. С. 101–128.

- [170] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956, 504 с.
- [171] Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1968. 283 с.
- [172] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [173] Хинчин А. Я. Математические основания квантовой статистики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951, 256 с.
- [174] Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ИЛ, 1947.
- [175] Чен Ф. Введение в физику плазмы / Пер. с англ. М., 1987.
- [176] Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Мир, 1960. 510 с.
- [177] Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
- [178] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [179] Четверушкин Б. Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [180] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.
- [181] Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М.: ИЛ, 1958.
- [182] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
- [183] Эдвардс Р. Е. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
- [184] Эйнштейн А., Смолуховский М. Сб. статей «Броуновское движение». М.: ОНТИ, 1936, 607.
- [185] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теория оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
- [186] Athanopoulos I., Caffarelli L. A., Salsa S. Phase transition problems of parabolic type: flat free boundaries are smooth // Communications on pure and applied mathematics. 1998. vol. LI. 77–112.
- [187] Barmin I. V., Egorov A. V., Senchenkov A. S. Technological equipment of Splan Technical Center for producing materials in space. Some results of the experiments on crystal growth // Microgravity Q., 1993, Vol. 3, №2–4. P. 233–239.
- [188] Bellomo N., Toskani G. On the Cauchy problem for the nonlinear Boltzmann equation: global existence, uniqueness and asymptotic stability // J. Math. Phys., 1985. V. 26. №2. P. 334–338.
- [189] Benilan Ph., Kruzhkov S. N. Conservation laws with continuous flux function // NoDEA, 1996. V. 3. P. 395–414.
- [190] Berry E. X. Cloud droplet growth by collection // Journal of the Atmospheric Sciences, 1967. V. 24. P. 688–701.
- [191] Berry E. X., Reinhardt R. L. Droplet collection rates for double initial Gaussian distributions // In Proc. Intern. Conf. Cloud Phys. London, 1972. P. 78–79.
- [192] Berry E. X., Reinhardt R. L. An analysis of cloud drop growth by collections // Journal of the Atmospheric Sciences, 1974. V. 31. №7. P. 1814–1831.

- [193] Boltzmann L. Weitere studien iiber das Warmgleichwicht unter gas molekulen // Ber. Acad. Wiss. Wien, GG V. 300. №6, 1872. P. 275–370.
- [194] Braun W., Hepp K. «The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the  $1/N$  Limit of Interacting Classical Particles», Commun. Math. Phys., 36, 101–113, (1977).
- [195] Caratheodory C. Vorlesungen uber reelle Funktionen. Leipzig, 1927.
- [196] Chin E. H. C., Neiburger M. A. A numerical simulation of gravitational coagulation process for cloud droplets // Journal of the Atmospheric Sciences, 1972. V. 19. P. 718–727.
- [197] CBM collaboration. Compressed Baryonic Matter Experiment Technical Status Report CBM experiment // January 2005, CBM collaboration. 423 P. <http://www.gsi.de-documents/DOC-Feb-447-1.pdf>.url.
- [198] Cottet G., Soler J. «Three-dimensional Navier-Stokes equations for singular filament data», J. Differential Equations, 74 (1988). P. 234–253.
- [199] Ettouney H. M., Brown R. A. Finite- element methods for steady solidification problems // J. Comput. Phys. 1983, 49, №1. P. 118– 150.
- [200] Degond. P. «Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Plank equation in 1 and 2 space dimensions», Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 19, 519–942 (1986).
- [201] DiPerna R. J. Measure-value solutions of conservation laws // Arch. Ration. Mech. Anal., 1985. V. 88, 223–270.
- [202] DiPerna R. J. Compensated compactness and general systems of conservation laws // Trans. Amer. Math. Soc., 1985. V. 292. №2. P. 383–420.
- [203] DiPerna R. J., Lions P. L. Solutions globales de l'equation de Boltzmann // C R. Acad. Sc. Paris, 1988. T. 306. P. 343–346.
- [204] DiPerna R. J., Majda A. J. Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations // Comm. Math. Physics, 1987. V. 108, 667–689.
- [205] Drake R. L. The scalar transport equation of coalescence theory. Moments and Kernels // Journal of the Atmospheric Sciences, 1972. V. 29. №3, 537–547.
- [206] Friedlander S. K. Theoretical considerations for the particle size spectrum of the stratospheric aerosol // J. Met., 1961. V. 18, 753– 759.
- [207] Giga Y., Miyakawa T. «Navier-Stokes flow in  $R^3$  with measures as initial vorticity and Morrey spaces», Comm. In P. D. E., 14 (1989). P. 577–618.
- [208] Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations // Comm. Pure Appl. Math., 1965. V. 18. P. 697–715.
- [209] Galkin V. A., Dubovskii P. B. and Stewart I. W. Exact solution for the coagulation-fragmentation equation // Printed in UK. J. Physics A: Math. Gen., 1992. V. 25. P. 4737–4744.
- [210] Galkin V. A., Russkikh V. V. Convergence of approximated methods for incompressible fluid equations // Proc. of 2-nd IMACS Intrn. Conf. on Comp. Phys., 1993.
- [211] Galkin V. A. Convergence and numerical stability of approximate methods for conservation laws // World Scientific Publishing Co. International Journal of Modern Physics C, 1994. V. 5. №2. P. 207–214.
- [212] Galkin V. A., Zaboudko M. A., Tertycnyy R. G. The simulation of particles growth based on Vlasov's approach // Proceedings of the Fifth International Conference on Simulation of Devices and Technologies (ICSDT'95), Obninsk, 1995. P. 41–42.

- [213] *Galkin V. A., Russkikh V. V.* On the background of limit path for the Korteweg de Vries Equatuon as the Dispertion Vanishes // Kluwer Academic Publishers/Netherlands. Acta Applicande Mathematicae. V. 39, 1995. P. 307–314.
- [214] *Galkin V. A.* Global correctness of Cauchy problem for nonlinear conservation laws system and one Example for the Gas Dynamics // Birkhauser, Verlag Basel/Switzerland. International Series of Numerical Mathematics, 1999. V. 129. P. 361–368.
- [215] *Galkin V. A., Zaboudko M. A.* Galerkin approximate method for solving of phase transition equations // Abstracts of the Third International Conference Single crystal growth, strength problems, and heat mass transfer (ICSC 99), Obninsk, 1999. P. 221–222.
- [216] *Galkin V. A.* Background of Computations for Mathematical Models, Based on Conservation Laws Systems and Applications to Fluid dynamics. In the book: Parallel Computational Fluid Dynamics. Advanced Numerical Methods Software and Applications. Elsiver, 2003. P. 357–366.
- [217] *Galkin V. A.* Background of mathematical models, based on conservation laws systems In the book: Industrial Mathematics, 2006, Narozsa Publishing House, New Delhi, India. P. 159–178.
- [218] *Galkin V. A.* Singularities of the Solutions of the Infinite-Dimensional Hyperbolic Smoluchowski System, Describing Coagulation Process. In the book: Differential Equations. World Scientific Co, Singapour, 2005, 505–511.
- [219] *Galkin V. A., Galkin A. V.* Quasilinear non-local Hopf-type equation describing clusters growth due to mutual connections between elements in the interacting couples of clusters // Proc. of the EQUADIFF-2007, Vienna, Austria, 2007.
- [220] *Gardner C. S., Green N. G., Kruskal M. P., Miura K. M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett., 1967, 1095–1097.
- [221] *Hidy J. M.* On the theory of coagulation of noninteracting particles in brownian motion // J. Colloid. Sc, 1965. V. 20. P. 123–144.
- [222] *Hilbert D.* Math. Ann., 72, 562 A912).
- [223] *Hilbert D.* Grundziige einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. New York: Chelsea. 1953.
- [224] *Hopf E.* The partial differential equation  $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$  // Comm. Pure Appl. Math., 1950. V. 3. P. 201–230.
- [225] *Hopf E.* Uber die Anfangswertaufgabe fur die hydrodinamischen Grundgle ichungen // Math. Nachr., 4, 1951, 213–231.
- [226] *Hopf E.* On nonlinear partial differential equations // Lecture Series of the Symposium on Partial Differential Equations, Berkley, 1955, Ed. the Univ. of Kansas, 1957, 1–29.
- [227] *Horst, E. and Hunze, R.* «Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation», Math. Meth. In the Appl. Sci. 6, 262–279 (1984).
- [228] *Hu J.* «The Riemann problem for a resonant nonlinear system of conservation laws with Dirac-measure solutions», Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 127A, 1997.

- [229] *Kato T.* On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation // Stud. Appl. Math. Adv. Math. Suppl. Stud., N. Y.; London: Academic Press, 1983. V. 8, 93–128.
- [230] *Kozono H., Yamazaki M.* «Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distribution as initial data», C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 317 (1993). P. 1127–1132.
- [231] *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Чехосл. матем журн., 7, №3, 418–449, 1957.
- [232] *Lang R., Xanh N. X.* Smoluchowski's theory of coagulation in colloids holds rigorously in Boltzmann-Grad limit // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 54, 1980, 227–280.
- [233] *Langevin P.* Sur la theorie du mouvement brownien // Comptes Rendus, Paris, 1906. V. 146. №10. P. 530–533.
- [234] *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math., 1968, 21, 467–490.
- [235] *Leray J.* Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois // J. Math. Pures et. Appl., 13, 1934, 331–418.
- [236] *Lions J.-L.* Quelques resultats d'existence dans les equations aux derivees partielles non lineaires // Bull. Soc. Math. France, 87, 1959, 245–273.
- [237] *Lions J.-L., Prodi G.* Un theoreme d'existence et d'unicite dans les equations de Navier-Stokes en dimension 2 // C. R. Acad. Sci., Paris, 248, 1959, 3519–3521.
- [238] *Lions J.-L.* Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires // Dunod, Paris, 1969.
- [239] *Lions P., Perthame B.* «Propagation of moments and regularity for the 3- dimensional Vlasov-Poisson system», Inventiones Math., 105 (1991). P. 415–430.
- [240] *Lorentz H. A.* Abhandlung uber theoretische Physik // I, 43–71, Leipzig, 1907.
- [241] *Maxwell J. C.* The Scientific letters of J. C. Maxwell. New York, Dover, 1965.
- [242] *McLeod I. B.* On the scalar transport equation // Proc. London Math. Soc, 1964. V. 14. P. 445–458.
- [243] *Meksyn D.* New methods in laminar boundary layer theory // Pergamon Press, London, 1961, ch. XXII.
- [244] *Melzak Z. A.* The effect of coalescence in certain collision processes // Quart. Appl. Math., 1953. V. 2. №2. P. 231–234.
- [245] *Melzak Z. A.* A scalar transport equation. 1 // Trans. Amer. Math. Soc, 1957. V. 85. P. 547–560.
- [246] *Melzak Z. A.* A scalar transport equation. 2 // Michigan Math. J., 1957. V. 4. P. 193–206.
- [247] *Melzak Z. A.* Entire operators and functional equations // Proc. Amer. Math. Soc, 1959. V. 10. P. 438–447.
- [248] *Melzak Z. A.* The possibility set of the solutions of a transport equation // Michigan Math. J., 1959. V. 6. P. 331–334.
- [249] *Metropolis N., Ulam S.* The Monte Carlo method. // J. Amer. Stat. Assoc. 1949. V. 44. № 247. P. 335–341.
-

- [250] *Morgenstern D.* Analytical studies related to the Maxwell–Boltzmann equation // *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 1955. V. 4. P. 533–554.
- [251] *Muller H.* Zar allgemeinen theoric cler rashen Koagulation // *Kolloidchem. Beil.*, 1928, Bd 27.
- [252] *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // *Verhandlg. Ill. Intern. Math. Kongr. Heidelberg*, 1904, 484–491.
- [253] *Radon.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften*, Bande 29, s. 262–277, Leipzig, 1917.
- [254] *Rein, G., Wreckler, J.* «Generic Global Classical Solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Plank system in three dimensions», *J. Differential Equations*, 99 (1992). P. 59–77.
- [255] *Rosenthal A.* Über die Existenz der Losungen von Systemem gewöhnlicher Differentialgleichungen, *Sitzungsber. Heideiberger Akad., Math.-naturw. Klasse*, 19 Abhandl. 3–10, 1929.
- [256] *Rozhdestvensky B. L., Simakin I. N.* Secondary flows in a plane channel; their relationship and comparison with turbulent flows // *J. Fluid Mech.*, 1984. V. 14.7, 261–289.
- [257] *Scott W. I.* Analytical studies of cloud droplet coalescence // *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1968. V. 25. P. 54–65.
- [258] *Shumann T. E. W.* Theoretical aspects of the size distributions of fog particles // *Quart. J. Rog. Met. Soc.*, 1940. V. 66. №285. P. 197–207.
- [259] *Smoluchowski M.* Drei Vortrage über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen // *Phys. Zeits. XVII*, 1916. P. 557–585 und 585–559.
- [260] *Smoluchowski M. V.* Versuch Einer Mathematischen Theorie der Koagulationskinetik Kolloider Losungen // *Z. physikalische Chemie*, 92, 1917, 129–168.
- [261] *Schwarz M. Jr.* Periodic solutions of Kadontzev-Petviashvili // *Adv. Math.*, 1987. V. 66, 3, 217–233.
- [262] *Swift D., Friedlander S. K.* The coagulation of hydrosols by brownian motion and laminar shear flow // *J. Colloid. Sc.*, 1964. V. 19. №7. P. 621–647.
- [263] *Tartar L.* Compensated compactness and applications to the partial differential equations // *Res. Notes in Math.*, 1979. №39. P. 136–212.
- [264] *Temam R.* On the Euler equations of incompressible perfect fluids // *J. Funct. Anal.*, 20, 1975, 32–43.
- [265] *Temam R.* Turbulence and Navier-Stokes equations // *Lecture Notes in Math.* V. 565, Springer Verlag, 1976.
- [266] *Ukai S.* Les solutions de l'equation de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans demi espace // *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1976. T. 282.
- [267] *Victory, H. And O'Dwyer, B.* «On classical solutions of Vlasov-Poisson-Fokker-Plank systems», *Indiana Univ. Math. J.* 39, 105–157 (1990).
- [268] *Victory H.* «On the existence of global weak solutions for Vlasov-Poisson-Fokker-Plank systems», *J. Math. Anal. And Appl.*, 160 (1990).
- [269] *Warshaw M.* Cloud droplet coalescence. Statistical foundations and one-dimensional sedimentation model // *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1967. V. 24. P. 278–286.
- [270] *Weber F. J.* *Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 27 (2001) 465.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Глава 1. <b>Основные уравнения моделей физической кинетики и сопутствующие уравнения механики сплошной среды</b> .....	5
§ 1. Законы сохранения .....	5
§ 2. Обобщенное уравнение Больцмана. Уравнение Больцмана кинетической теории газов и уравнение Смолуховского теории коагуляции. ....	6
§ 3. Уравнения Власова .....	17
§ 4. Уравнения Кортевега — де Фриза, Кадомцева—Петвиашвили, Хопфа .....	19
§ 5. Уравнения механики сплошной среды, порожденные уравнениями физической кинетики. Примеры решений уравнения Лиувилля для течений с разрывным полем скоростей .....	21
§ 6. Некоторые специальные решения уравнений газодинамики, уравнений Больцмана и Смолуховского. ....	25
§ 7. Две математические модели столкновений бильярдных шаров, приводящие к решениям уравнения Больцмана .....	41
§ 8. Фазовые переходы, задача Стефана и выращивание кристаллов .....	48
§ 9. Постановка задачи Стефана. ....	49
Глава 2. <b>Функциональные решения систем законов сохранения</b> .....	52
§ 1. Основные обозначения, пространства и определения .....	52
§ 2. Сходимость в целом приближенных методов .....	59
§ 3. Достаточные условия сходимости приближенных методов для ОДУ .....	63
§ 4. Метод исчезающей вязкости для конечномерной квазилинейной системы законов сохранения .....	67
§ 5. Выделение классов корректности регулярных функциональных решений. ....	68
§ 6. Понятие решения в среднем. ....	70
§ 7. Предельный переход под знаком интеграла .....	71

§ 8. Разрешимость в среднем нелинейных систем	73
§ 9. Пример. Градиентные системы квазилинейных уравнений	75
§ 10. Заключительные замечания о выборе классов функциональных решений.	77
<b>Глава 3. Уравнения Больцмановского типа</b>	<b>78</b>
§ 1. Операторы столкновений	78
§ 2. Разностный метод решения пространственно неоднородных уравнений Больцмановского типа	82
§ 3. Доказательство сходимости разностного метода к функциональному решению задачи Коши	86
§ 4. Функциональные решения пространственно неоднородных уравнений Больцмана, Смолуховского	90
§ 5. Уравнения с малыми начальными данными	91
§ 6. Функциональные пространства, условия согласования операторов столкновения и свободного переноса	92
§ 7. Формулировка основных результатов	93
§ 8. Свойства интегрального оператора, определенного правой частью нелинейного уравнения типа Вольтерра	98
§ 9. Доказательство теоремы 3.4	101
§ 10. Неотрицательные решения интегрального уравнения (3.14)	103
§ 11. Итерационный метод решения пространственно однородной задачи	105
§ 12. Регуляризуемые задачи.	111
§ 13. Сходимость итераций во вложенных пространствах.	114
<b>Глава 4. Математическое моделирование газа, образующего конденсированную структуру.</b>	<b>119</b>
§ 1. Введение	119
§ 2. Кинетическое уравнение	120
§ 3. Пространственно однородная модель. Дискретное фазовое пространство	122
§ 4. Пространственно однородная модель. Фазовое пространство $\Omega = \mathbb{R}_n$	127
§ 5. Пространственно неоднородная модель	130
§ 6. Аналитическое решение дискретной модели (4.2), (4.12)	130
§ 7. Компьютерное моделирование дискретной модели (4.2), (4.12)	134
§ 8. Переход от кинетического уравнения ортогональных столкновений к кинетическому уравнению Смолуховского	138
§ 9. Тестирование модели (4.34)–(4.37) на примере ортогональных столкновений на сферах в трехмерном пространстве	142
§ 10. Пространственно однородная модель. Непрерывное фазовое пространство $\Omega = \mathbb{R}_n$	145

§ 11. Сферически симметричные аналитические решения уравнения (4.2), (4.19) . . . . .	148
<b>Глава 5. Две модели кинетической теории коагуляции . . . . .</b>	<b>152</b>
§ 1. Введение . . . . .	152
§ 2. Моделирование пространственно однородной коагуляции на основе однократного розыгрыша пары взаимодействующих частиц (быстрая коагуляция) . . . . .	152
§ 3. Вычислительный эксперимент для пространственно однородной модели быстрой коагуляции на основе однократного розыгрыша пары взаимодействующих частиц. . . . .	161
§ 4. Метод прямого моделирования медленной коагуляции, основанный на повторных розыгрышах пар взаимодействующих частиц . . . . .	166
§ 5. Моделирование пространственно неоднородной коагуляции на основе однократного розыгрыша пары взаимодействующих частиц . . . . .	175
§ 6. Разностный метод для уравнения Смолуховского с источником частиц . . . . .	184
<b>Глава 6. Обобщенные решения уравнения Смолуховского пространственно неоднородной коагуляции . . . . .</b>	<b>198</b>
§ 1. Пространственно неоднородная коагуляция . . . . .	198
§ 2. Негладкие особенности решения уравнения Смолуховского в случае дискретных масс . . . . .	200
§ 3. Обобщенное решение кинетического уравнения Смолуховского в случае дискретных масс . . . . .	207
§ 4. Гладкие решения аппроксимирующих задач (6.17) . . . . .	209
§ 5. Слабая непрерывность произведения функций . . . . .	212
§ 6. Доказательство теоремы 6.2. Существование обобщенного решения задачи (6.1), (6.2) . . . . .	218
§ 7. Обобщенное решение пространственно неоднородного уравнения Смолуховского для непрерывных масс. . . . .	222
§ 8. Корректность задачи (6.44) . . . . .	225
§ 9. Оценки решения задачи (6.44) . . . . .	229
§ 10. Корректность задачи (6.43) . . . . .	235
<b>Глава 7. Нелокальная теория для пространственно однородного уравнения Смолуховского . . . . .</b>	<b>243</b>
§ 1. Основные функциональные пространства . . . . .	243
§ 2. Основные результаты для ограниченных ядер. Вспомогательные построения. . . . .	245
§ 3. Единственность решения задачи Коши для уравнения коагуляции с ограниченным ядром в классе $\Omega_0(T)$ . Непрерывная зависимость решения от входных данных задачи . . . . .	249
§ 4. Неотрицательные решения задачи Коши (7.2) . . . . .	251
§ 5. Построение локального решения уравнения коагуляции . . . . .	253

§ 6. Равномерные оценки норм неотрицательного решения. Доказательство теоремы 7.1 . . . . .	256
§ 7. Класс неограниченных ядер . . . . .	260
§ 8. Предварительные замечания. Формулировка теоремы существования и единственности решения с ядрами $\Phi \in \mathcal{K}$ . . . . .	261
§ 9. Аппроксимация задачи с неограниченным ядром. Оценки норм решений аппроксимирующих задач . . . . .	263
§ 10. Компактность семейства аппроксимаций в пространстве непрерывных функций . . . . .	270
§ 11. Доказательство разрешимости задачи Коши для уравнения коагуляции с неограниченным ядром . . . . .	273
§ 12. Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши с неограниченным ядром . . . . .	275
§ 13. Переход соотношения сохранения в соотношение диссипации . . . . .	283
§ 14. Формулировка основного результата . . . . .	286
§ 15. Формулы для моментов (доказательство теоремы 7.4) . . . . .	291
§ 16. Доказательство теоремы 7.3 . . . . .	294
§ 17. Стационарное уравнение Смолуховского с источником частиц . . . . .	300
<b>Глава 8. Сходимость приближенных методов для уравнений несжимаемой жидкости . . . . .</b>	<b>307</b>
§ 1. Предварительные замечания и обозначения . . . . .	307
§ 2. Функциональные решения уравнений несжимаемой жидкости. Метод исчезающей вязкости . . . . .	308
§ 3. Слабая сходимость метода Галёркина для системы уравнений Эйлера . . . . .	313
§ 4. Методы Галёркина для уравнений Навье—Стокса с использованием реального базиса в случае размерности пространственных переменных 2 и 3 . . . . .	316
§ 5. Слабая непрерывность произведения функций . . . . .	317
§ 6. Одна теорема существования для стационарных уравнений Навье—Стокса ( $n \leq 4$ ) . . . . .	318
§ 7. Условная единственность решений уравнений Навье—Стокса . . . . .	320
§ 8. Энергетический метод оценки устойчивости ламинарных течений . . . . .	322
§ 9. Функциональные решения уравнений Кадомцева—Петвиашвили и Кортевега — де Фриза . . . . .	327
§ 10. Метод Галёркина для уравнения Кортевега — де Фриза . . . . .	328
§ 11. Об особенностях решений периодической задачи для уравнения КдФ . . . . .	333

§ 12. Существование функциональных решений начально-краевой задачи для одного параболического уравнения с разрывной нелинейностью . . . . .	334
<b>Глава 9. Уравнения Лиувилля—Власова—Больцмана—Смолуховского . . . . .</b>	<b>339</b>
§ 1. Уравнение Лиувилля с разрывными потоками . . . . .	339
§ 2. Уравнения Лиувилля—Власова . . . . .	344
§ 3. Определение обобщенного решения уравнения Лиувилля . . . . .	347
§ 4. Построение функционального решения уравнения Власова с сингулярными потенциалами на основе аппроксимаций Р. Л. Добрушина . . . . .	349
§ 5. Задача восстановления границы фазового перехода . . . . .	352
§ 6. Кинетический подход к моделированию процесса объемной кристаллизации . . . . .	360
§ 7. Обоснование корректности задачи (9.39), (9.40) . . . . .	361
§ 8. Численное моделирование . . . . .	366
<b>Глава 10. Дополнение. Сведения из общей теории множеств, топологии и теории функций . . . . .</b>	<b>369</b>
§ 1. Множества, отношения . . . . .	369
§ 2. Основные понятия топологии . . . . .	377
§ 3. Произведение топологий . . . . .	380
§ 4. Компактные пространства . . . . .	380
§ 5. Теорема о гомеоморфизме . . . . .	381
§ 6. Теорема А. Н. Тихонова . . . . .	382
§ 7. Слабые топологии в сопряженных пространствах . . . . .	383
§ 8. Пространства суммируемых функций . . . . .	385
§ 9. Теоремы Бэра и Банаха—Штейнгауза . . . . .	386
§ 10. Принцип максимума . . . . .	387
<b>Литература . . . . .</b>	<b>391</b>



**Галкин Валерий Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, заведующий кафедрой прикладной математики Обнинского государственного технического университета атомной энергетики. Специалист в области математического моделирования и расчетов в физической кинетике, теории законов сохранения. Автор свыше 120 научных работ. Организатор международных конференций «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания».

Монография относится к актуальной области математического моделирования в современных задачах физической кинетики и газовой динамики. Изложен общий подход к анализу нелинейных систем законов сохранения на основе теории функциональных решений. Обоснованы приближенные методы для уравнений Больцмана и Смолуховского, а также рассмотрены проблемы, возникающие в ряде физических процессов, которые сопровождаются скачками и сильными высокочастотными осцилляциями физических параметров. Представлены численные модели соответствующих физических процессов.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся задачами физической кинетики и гидродинамики, в том числе начинающих работать в этой области и не имеющих узкоспециальной подготовки.

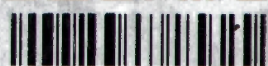
ISBN 978-5-94774-901-4



9 785947 1749014

интернет-магазин

**OZON.RU**



42974106